Beweistechniken

Ronja Düffel
WS2014/15

13. Januar 2015

Warum ist Beweisen so schwierig?

- unsere natürliche Sprache ist oft mehrdeutig
- wir sind in unserem Alltag von logischen Fehlschlüssen umgeben
- Logik hilft beim Argumentieren und Aufschreiben von Beweisen
- beim *Finden* von Beweisen helfen:
  - **Erfahrung**
  - Problemlösungsstrategien
  - Kenntnis typischer Beweismuster

Beweis

Definition (Beweis)

Ein Beweis ist eine **logisch vollständige Begründung** *einer Aussage.*

Solange eine Aussage nicht bewiesen ist, kann es sein, dass sie falsch ist. Egal durch wie viele Beispiele sie gestützt wird.

FERMAT-Zahlen

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

Vermutung (1637): Alle F_n sind Primzahlen

Widerlegt (1732) von EULER: $F_5 = 4294967297$ ist durch 641 teilbar

$(A \Rightarrow B)$

Jeder Beweis lässt sich auf Aussagen dieser Form $(A \Rightarrow B)$ „herunterbrechen". Für manche Beweise müssen mehrere Dinge gezeigt werden, z.B.

- Äquivalenzaussagen $(A \Leftrightarrow B)$ („genau dann..., wenn...)
- Induktionsbeweis

aber immer Aussagen vom Typ $(A \Rightarrow B)$.

Leider ist die Logik hinter dieser Aussageform nicht immer intuitiv.

Implikation

Definition (Implikation)

Die Aussage „Wenn A, dann B“($(A \Rightarrow B)$) ist genau dann wahr, wenn A wahr **und** *B wahr ist, oder wenn A falsch ist.*
Man sagt auch „Aus A folgt B oder „A impliziert B“.

A heißt **Prämisse** *oder* **Voraussetzung**

B heißt **Konklusion** *oder* **Schlussfolgerung**

Sei X die Menge aller Objekte/Ereignisse, für die A gilt (die A erfüllen) und Y die Menge aller Objekte/Ereignisse, die B erfüllen, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

$$A \Rightarrow B$$

$$X \subseteq Y$$

direkter Beweis

Ziel: Beweis der Aussage $A \Rightarrow B$
Wir zeigen: $A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow B$
wobei die Schritte zwischen den Aussagen erläutert werden müssen. In der Regel handelt es sich um:

- Anwendung von Definitionen
- Anwendung **bereits bewiesener** Aussagen
- **einfache** Umformungen
- **nachvollziehbare** Schlussfolgerungen

Beispiel direkter Beweis

Satz

Die Summe zweier gerader Zahlen ist eine gerade Zahl.

zu Zeigen: Wenn m, n gerade Zahlen sind, dann ist $m + n$ eine gerade Zahl.

Seien m, n gerade Zahlen.

$\Rightarrow$ m, n sind durch 2 teilbar (Definition gerader Zahlen).

$\Rightarrow$ es gibt $j, k \in \mathbb{Z}$, sodass $m = 2 \cdot j$ und $m = 2 \cdot k$ (Definition der Teilbarkeit).

$\Rightarrow$ $m + n = 2 \cdot j + 2 \cdot k = 2 \cdot (j + k)$ (Einsetzen und Ausklammern).

Sei $q = j + k$

$\Rightarrow$ $q \in \mathbb{Z}$, da $j, k \in \mathbb{Z}$ (Gruppeneigenschaft von $(\mathbb{Z}, +)$).

Dann ist $m + n = 2 \cdot q$ mit $q = j + k \in \mathbb{Z}$ (Einsetzen).

$\Rightarrow$ $m + n$ ist durch 2 teilbar und somit gerade.

$\square$

indirekter Beweis

Ziel: Beweis der Aussage $A \Rightarrow B$

Statt $A \Rightarrow B$ beweisen wir die **logisch äquivalente** Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Achtung!! Prämisse und Konklusion sind nun vertauscht!

Beispiel:

Satz

Für $a \in \mathbb{Z}$ gilt: Wenn a^2 gerade ist, dann ist auch a gerade.

Statt die Aussage direkt zu Zeigen, zeigen wir stattdessen:

Für $a \in \mathbb{Z}$ gilt: Wenn a ungerade ist, dann ist auch a^2 ungerade.

Beispiel indirekter Beweis

zu Zeigen: Für $a \in \mathbb{Z}$ gilt: Wenn a ungerade ist, dann ist auch a^2 ungerade.

Sei $a \in \mathbb{Z}$ und eine ungerade Zahl.

$\Rightarrow$ $a = 2 \cdot m + 1, m \in \mathbb{Z}$ (Darstellung ungerader Zahlen).

$\Rightarrow$ $a^2 = (2 \cdot m + 1)^2 = 2 \cdot 2 \cdot m^2 + 2 \cdot 2 \cdot m + 1 = 2 \cdot (2 \cdot m^2 + 2 \cdot m) + 1.$

Sei $q = 2 \cdot m^2 + 2 \cdot m$, da $m \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ $q \in \mathbb{Z}$ (Gruppeneigenschaft von $(\mathbb{Z}, +)$).

Somit ist $2 \cdot q$ gerade und $a^2 = 2 \cdot q + 1$ ungerade.

$\square$

Widerspruchsbeweis

Ziel: Beweis der Aussage $A \Rightarrow B$

Statt $A \Rightarrow B$ zeigen wir $(A \wedge \neg B) \Rightarrow$ **falsch**. Das zeigt, dass $(A \wedge \neg B)$ falsch gewesen sein muss, was wiederum logisch äquivalent zu der Aussage $A \Rightarrow B$ ist.

Variante: Es gibt keine Prämisse A, sondern nur eine Aussage. Dann zeigen wir $\neg B \Rightarrow$ **falsch** und somit, dass B wahr ist. **Achtung!!** Die

Konklusion, bzw. Aussage muss korrekt negiert werden!

Beispiel:

Satz

$\sqrt{2}$ *ist irrational.*

$\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Beispiel Widerspruchsbeweis

Angenommen, $\sqrt{2}$ ist rational, also $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

$\Rightarrow$ $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$,mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ (Definition $\mathbb{Q}$)

Nun ist $2 = \frac{a^2}{b^2}$ (Quadrieren) und $2 \cdot b^2 = a^2$ (Umformen)

$\Rightarrow$ a^2 ist durch 2 teilbar, da $b^2 \in \mathbb{Z}$ (Def. Teilbarkeit, Gruppeneigenschaft $(\mathbb{Z}, \cdot)$).

$\Rightarrow$ a ist durch 2 teilbar (bereits bewiesen)

und darstellbar als $a = 2 \cdot k, k \in \mathbb{Z}$ (Definition der Teilbarkeit)

$2 \cdot b^2 = (2 \cdot k)^2 \Leftrightarrow b^2 = 2 \cdot k^2$ ebenfalls durch 2 teilbar (Einsetzen und Def. Teilbarkeit),

und b ist ebenfalls durch 2 teilbar (bereits bewiesen).

Also teilt 2 sowohl a, wie auch b, was ein Widerspruch zu der Annahme ist, dass $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$.

Damit ist $\sqrt{2}$ irrational.

$\square$

Negation

Definition (Negation ($\neg$))

Die Formel $\neg A$ (bedeutet: „nicht A") ist genau dann wahr, wenn A falsch ist.

Negation zusammengesetzer Aussagen:

Die Aussage	ist äquivalent zu der Aussage
$\neg(A \text{ und } B)$	$\neg A \text{ oder } \neg B$
$\neg(A \text{ oder } B)$	$\neg A \text{ und } \neg B$
$\neg(\exists n \in M : A(n))$	$\forall n \in M : \neg A(n)$
$\neg(\forall n \in M : A(n))$	$\exists n \in M : \neg A(n)$

Merksatz: Negation vertauscht „und" mit „oder" und „für alle" mit „es gibt ein"

Vollständige Induktion

(Induktionsprinzip)

Sei $A(n)$ eine Aussage über natürliche Zahlen n. Wenn gilt:

1. **Induktionsverankerung (IV)**: *Es gilt $A(1)$.*
2. **Induktionsschluss (IS)**: *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\text{Aus } A(n) \text{ folgt } A(n+1).$$

dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Varianten:

- **IV** mit $n = n_0$, **IS** für alle $n \geq n_0$. $A(n)$ gilt dann nur für $n \geq n_0$.
- **IS** ersetzen durch: Für alle $n \geq n_0 + 1$ gilt: Aus $A(n-1)$ folgt $A(n)$. (Flächen färben)
- **IV:** Es gelten $A(n_0)$ und $A(n_0+1)$,
  IS: Für alle $n \geq n_0$ gilt: Aus $A(n), A(n+1)$ folgt $A(n+2)$.

Vorgehen bei der Vollständigen Induktion

1. **IV:** Zeige, dass $A(n_0)$ stimmt.
2. **IS:** Zeige, dass für alle $n \geq n_0$ gilt: Aus $A(n)$ folgt $A(n+1)$, indem man
   a) annimmt, dass $A(n)$ für ein beliebiges $n \geq n_0$ gilt
   Induktionsannahme
   b) zeigt, dass **unter dieser Annahme** dann auch $A(n+1)$ gilt.
   D.h. in der Argumentation muss die Induktionsannahme verwendet werden.

+ Beweisen *bekannter/vermuteter* Formeln
- untauglich zum Herleiten der Formeln
- man hat häufig das Gefühl das Problem trotz des Beweis nicht richtig verstanden zu haben

Allgemeines Vorgehen

1. Verstehen des Problems
   - Was ist gegeben?
   - Was ist gesucht?
   - Was sind die Voraussetzungen?

   Kontrolle: Kann ich jemand anderem das Problem erklären?
2. Untersuchen des Problems
   - Gefühl für das Problem bekommen (Beispiele/Spezialfälle betrachten, Skizzen, Tabellen)
   - kenne ich ein ähnliches Problem?
   - kann ich zunächst ein einfacheres Problem betrachten?
   - Was kann ich mit den gegebenen (Daten/Voraussetzungen) machen? (Vorwärtsarbeiten)
   - Wie kann ich das Ziel erreichen? (Rückwärtsarbeiten)
   - gibt es sinnvolle Zwischenziele?
3. geordnetes Aufschreiben der Lösung
4. **Rückschau**

Welcher Beweis für was?

- Formeln
  - direkte Herleitung aus bekannten Formeln durch Umformen
  - Vollständige Induktion
- Existenzbeweis
  - direkte Angabe (Konstruktion für alle n)
  - Widerspruchsbeweis
- Nichtexistenzbeweis/Unmöglichkeitsbeweis
  - Widerspruchsbeweis

keine Gewähr auf Vollständigkeit!

Häufiger Fehler und wie man ihn behebt

$$a = b$$
$$\downarrow$$
$$\text{schlaue Umformungen}$$
$$\downarrow$$
$$1 = 1$$

Noch kein Beweis! Bisher wurde lediglich gezeigt: Wenn $a = b$ ist, dann ist $1 = 1$. Die letzte Zeile sollte $a = b$ sein.

Reperatur:

1.Option: Wenn alle Umformungen Äquivalenzumformungen waren, kann man es einfach „umdrehen“. Beginne mit „Offensichtlich gilt $1 = 1$, dann“ (alle Schritte von vorher in umgekehrter Reihenfolge) „also $a = b$“.

2.Option: Eventuell ergeben die Umformungen auch soetwas wie: $a = c = d = f$ und $b = g = h = f$. Dann müssen die Terme lediglich zu $a = c = d = f = h = g = b$ umgeordnet werden.

Regeln zum Aufschreiben von Beweisen

1. Identifiziere Prämisse(n) und Konklusion(en)
   - Prämissen stehen häufig hinter Wörtern wie: *sei, wenn, angenommen, für alle*
   - Konklusionen stehen häufig hinter Wörtern wie: *dann, gilt, es gibt*
2. Beginne mit der Prämisse und Ende mit der Konklusion.
3. Beweise sind wie Anleitungen.
   - Schritt für Schritt von der Prämisse zur Konklusion
   - keine Argumentationssprünge
   - korrekte Grammatik, Zeichensetzung und Rechtschreibung
4. Alle verwendeten Variablen sollten definiert werden. Verwende nicht mehr Variablen als unbedingt nötig.
5. Ende des Beweises kenntlich machen.
   - Bei langen Beweisen kurze Zusammenfassung was gezeigt wurde.

Hilfreiche Literatur

- Daniel Grieser (2013): *Mathematisches Problemlösen und Beweisen*, Springer Verlag
- Albrecht Beutelspacher (2009): *Das ist o.B.d.A. trivial!*, Vieweg + Teubner
- Daniel Solow (2013): *How to Read and Do Proofs*, Wiley & Sons