# Der Kalkül der Mengen

# Präzise beschreiben und argumentieren: Aber wie?

- In welcher Sprache sollten wir versuchen, komplexe Sachverhalte vollständig und eindeutig zu beschreiben?
  - Natürliche Sprachen erlauben Beschreibungen mit einer Vielzahl häufig unerwünschter Interpretationen.
- In welcher Sprache und nach welchen Regeln sollten zum Beispiel Korrekheitsbeweise geführt werden?
  - Die Sprache und die Schlussregeln der Mathematik sind an Klarheit und Korrektheit des Schließens nicht zu übertreffen.

- Mit Hilfe des Kalküls der Mengen werden wir Relationen und Funktionen einführen und über Folgen und Wörter sprechen können.
  - Wir können komplexe Sachverhalte präzise beschreiben!
- Dann werden wir beginnen, Beweise zu verstehen und eigenständig zu führen.
  - Wir argumentieren (und führen Korrektheitsbeweise) mit den Schlußregeln der Mathematik.

# Schreibweisen

| Symbol | Bedeutung |
|---|---|
| $\{,\}$ | Mengenklammern<br>z.B. besteht die Menge $\{1,2,3\}$ aus den Elementen 1,2,3 |
| $:=$ | Definition eines Wertes,<br>z.B. $x := 5$, $M := \{1,2,3\}$ |
| $:\Leftrightarrow$ | Definition einer Eigenschaft oder einer Schreibweise<br>z.B. $m \in M :\Leftrightarrow m$ ist Element von $M$ |
| ex. | Abkürzung für „es gibt“, „es existiert“ |
| f.a. | Abkürzung für „für alle“, „für jedes“ |
| s.d. | Abkürzung für „so, dass“ |
| $\Rightarrow$ | Abkürzung für „impliziert“<br>z.B.: Regen $\Rightarrow$ nasse Straße |
| $\Longleftrightarrow$ | Abkürzung für „genau dann, wenn“<br>z.B.: Klausur bestanden $\Longleftrightarrow$<br>die erreichte Prozentzahl $z$ ist $\geqslant 50\%$ |
| $\square$ | markiert das Ende eines Beweises |

# Modellierung der Karten eines (Skat-)Kartenspiels

**Warum sind wir an Mengen und Operationen auf Mengen interessiert?**

Weil wir mit dem Kalkül der Mengen vieles beschreiben können, wie zum Beispiel die Karten eines Skat-Kartenspiels:

$$
\begin{aligned}
\text{KartenArten} &:= \{\ \text{Kreuz}, \text{Pik}, \text{Herz}, \text{Karo}\ \}\\
\text{KartenSymbole} &:= \{\ 7, 8, 9, 10, \text{Bube}, \text{Dame}, \text{König}, \text{Ass}\ \}\\
\text{Karten} &:= \{\ (\text{Kreuz}, 7), (\text{Kreuz}, 8), \ldots, (\text{Kreuz}, \text{Ass}),\\
&\qquad (\text{Pik}, 7), (\text{Pik}, 8), \ldots, (\text{Pik}, \text{Ass}),\\
&\qquad (\text{Herz}, 7), (\text{Herz}, 8), \ldots, (\text{Herz}, \text{Ass}),\\
&\qquad (\text{Karo}, 7), (\text{Karo}, 8), \ldots, (\text{Karo}, \text{Ass})\ \}.
\end{aligned}
$$

Aber die Menge der Karten stimmt überein mit allen möglichen **Paaren** einer Kartenart und eines Kartensymbols. Wir **möchten** deshalb kürzer schreiben:

$$\text{Karten} = \text{Kartenarten} \times \text{Kartensymbole}.$$

# Was sind Mengen?

# Das ist doch klar, oder?

Wir schreiben

$$m \in M,$$

um auszusagen, dass $M$ eine Menge ist und dass $m$ ein Element der Menge $M$ ist.
Wir schreiben

$$m \notin M,$$

um auszusagen, dass $m$ kein Element der Menge $M$ ist.

# Die Russelsche Antinomie

# Mal etwas völlig anderes?

Im Städtchen Sonnenthal,

in dem bekanntlich viele seltsame Dinge passieren,

wohnt ein Barbier, der genau diejenigen männlichen Einwohner von Sonnenthal rasiert, die sich nicht selbst rasieren.

Rasiert der Barbier sich selbst?

### Bertrand Russel, 1872–1970

Sei $N$ die Menge aller Mengen $M$, die sich nicht selbst enthalten, d.h.

$$M \in N :\Leftrightarrow M \text{ ist eine Menge, für die gilt: } M \notin M.$$

**Frage**: Enthält $N$ sich selbst, d.h. gilt $N \in N$?

- Klar: Entweder es gilt $N \in N$ oder es gilt $N \notin N$.
- Fall 1: $N \notin N$.
  Gemäß Definition der Menge $N$ gilt dann $N \in N$: Widerspruch.
- Fall 2: $N \in N$.
  Gemäß Definition der Menge N gilt dann $N \notin N$: Widerspruch.

### Und nu?

Die Menge $N$ existiert nicht!

# Die Russellsche Antinomie (2/2)

- Russell führte in 1903 die Typentheorie zur Auflösung der Antinomie ein:
  - Eine Menge hat stets einen höheren Typ als ihre Elemente.
- In der **Zermelo-Fraenkel Mengenlehre** stellt eine Axiomatisierung der Mengenlehre **wahrscheinlich** sicher, dass keine Antinomien auftreten.
  - Entschuldigung: Es treten wahrscheinlich(!?!) keine Antinomien auf?
  - Die Widerspruchsfreiheit der vollen Zermelo-Fraenkel Mengenlehre kann ohne weitere Annahmen nicht gezeigt werden **:-(**

# Wichtige Mengen

Wir definieren $\emptyset$ als die leere Menge, also als die Menge ohne Elemente.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{N} &:= \text{Menge der natürlichen Zahlen} := \{0, 1, 2, 3, ...\} \\
\mathbb{N}_{>0} &:= \text{Menge der positiven natürlichen Zahlen} := \{1, 2, 3, ...\} \\
\mathbb{Z} &:= \text{Menge der ganzen Zahlen} := \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...\} \\
\mathbb{Q} &:= \text{Menge der rationalen Zahlen} := \{\tfrac{a}{b} \ : \ a, b \in \mathbb{Z}, \ b \neq 0\} \\
\mathbb{R} &:= \text{Menge der reellen Zahlen.}
\end{aligned}
$$

# Wie beschreiben wir Mengen? (1/2)

Eine Diskussion der Zermelo-Fraenkel Axiomatisierung sprengt den Rahmen dieser Vorlesung und ist auch gar nicht erforderlich.

Stattdessen beschreiben wir Mengen „**extensional**“ durch Aufzählung ihrer Elemente

$$M = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

oder „**intensional**“ durch

1. Angabe einer bereits definierten Obermenge und
2. einer Beschreibung der Eigenschaft ihrer Elemente.

$$M = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n \text{ ist eine Primzahl und } n \leqslant 22\}.$$

(Lies den Doppelpunkt als „so dass“). Beachte, dass wir in der Definition der Menge $M$ auf die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen Bezug nehmen.

# Wie beschreiben wir Mengen? (2/2)

Angenommen, wir haben die Menge $A$ bereits definiert. Wie beschreiben wir

die Menge $B$ aller Elemente aus $A$, die die Eigenschaft $E$ besitzen?

Wir schreiben

$$\begin{aligned} B &= \{\, x \in A \ : \ x \text{ hat Eigenschaft } E \,\}, \text{ bzw.} \\ B &= \{\, x \ : \ x \in A \text{ und } x \text{ hat Eigenschaft } E \,\}. \end{aligned}$$

Weitere Konventionen:

(a) In der Literatur wird manchmal ein vertikaler Strich statt des Doppelpunkts verwendet, also $B = \{\, x \in A \mid x \text{ hat Eigenschaft } E \,\}$.

(b) In der Beschreibung der Eigenschaft der Elemente verwendet man manchmal ein Komma statt eines „und“. Also

$$B = \{\, x \in A \ : \ x \text{ hat Eigenschaft } E_1,\ x \text{ hat Eigenschaft } E_2 \}$$

statt

$$B = \{\, x \in A \ : \ x \text{ hat Eigenschaft } E_1 \text{ und } x \text{ hat Eigenschaft } E_2 \}.$$

# Beispiele: Worauf muss man achten?

- $\{\ n\ :\ \ n \text{ ist eine Quadratzahl}\ \}$ ist nicht vollständig definiert: $n$ könnte eine natürliche, rationale oder reelle Zahl sein. Die richtige Definition ist

$$\{\ n \in \mathbb{N}\ :\ \ n \text{ ist eine Quadratzahl}\ \}.$$

- Gibt es eine größte Menge, also die „Menge“

$$U := \{\ M\ :\ \ \text{M ist eine Menge}\ \}$$

aller Mengen? Wenn $U$ eine Menge ist, dann ist auch

$$N = \{M \in U\ :\ M \notin M\}$$

eine Menge, und das haben wir widerlegt.

? $S$ ist die Menge aller männlichen Einwohner von Sonnenthal. Bestimme die Menge

$$X = \{\ B \in S\ :\ \ B \text{ rasiert alle Männer in } S\text{, die sich nicht selbst rasieren}\ \}.$$

# Worauf muss ich noch achten?

- Ein jedes Element kommt nur einmal in der Menge vor.
- Elemente haben keine bestimmte „Position“ in ihrer Menge: Die folgenden Beschreibungen führen alle auf dieselbe Menge

$$\{1,2,3,4\} = \{1,2,4,3\} = \{1,2,3,4,2\}.$$

- Mengen können durchaus aus „verschiedenartigen“ Elementen zusammengesetzt sein:

$$X = \{1, A, (\text{Pik}, 8), \{\text{ rot, blau }\}\}$$

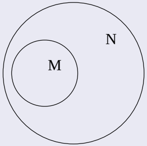
ist eine stink-normale Menge. Übrigens, aus welchen Elementen besteht $X$?

# Mengenalgebra: Durchschnitt, Vereinigung und Komplementbildung

# Teilmengen und Obermengen

(a) Die Menge $M$ ist eine **Teilmenge** der Menge $N$ (kurz: $M \subseteq N$), wenn jedes Element von $M$ auch ein Element von $N$ ist. Kurz: f.a. $x \in M$ gilt $x \in N$.

Skizze:




(b) $M$ ist eine **Obermenge** von $N$ (kurz: $M \supseteq N$), wenn $N \subseteq M$ gilt.

Sei $N$ eine beliebige Menge. Gilt $\emptyset \subseteq N$?

Ja, denn die Implikation

„wenn $x$ ein Element der leeren Menge ist, dann ist $x$ auch ein Element von $M$“

ist wahr, da die Voraussetzung $x \in \emptyset$ stets falsch ist.

# Mengengleichheit (1/2)

Zwei Mengen $M$ und $N$ sind genau dann **gleich** (kurz $M = N$), falls sie dieselben Elemente enthalten, d.h. falls gilt:

- f.a. $x \in M$ gilt $x \in N$, und
- f.a. $x \in N$ gilt $x \in M$.

(a) Es ist $\emptyset \neq \{\emptyset\}$, denn
  - die leere Menge $\emptyset$ hat keine Elemente,
  - die Menge $\{\emptyset\}$ hat aber genau ein Element, nämlich die leere Menge $\emptyset$.

(b) Es gibt genau eine leere Menge!
  - Angenommen sowohl die Menge $M$ wie auch die Menge $N$ ist leer.
  - Da $M$ leer ist: f.a. $x \in M$ gilt $x \in N$.
  - Da $N$ leer ist: f.a. $x \in N$ gilt $x \in M$.
  - Also folgt $M = N$.

# Mengengleichheit (2/2)

Gilt denn nicht $M = N$ genau dann, wenn $M \subseteq N$ und $N \subseteq N$?

$M, N$ und $P$ seien Mengen. Dann

(a) $M = N \;\Leftrightarrow\; M \subseteq N$ und $N \subseteq M$.

(b) Wenn $M \subseteq N$ und $N \subseteq P$, dann $M \subseteq P$.

Und wie zeigt man das? Siehe Tafel.

# Echte Teilmengen und echte Obermengen

(a) $M$ ist eine **echte Teilmenge** von $N$ (kurz: $M \subset N$), wenn $M \subseteq N$ und $M \neq N$ gilt.

(b) $M$ ist eine **echte Obermenge** von $N$ (kurz: $M \supset N$), wenn $M \supseteq N$ und $M \neq N$ gilt.

# Durchschnitt, Vereinigung, Differenz und Komplementbildung

# Operationen auf Mengen

Seien $M$ und $N$ Mengen.

(a) Der **Durchschnitt** von $M$ und $N$ ist die Menge

$$M \cap N \ := \{x \ : \ x \in M \text{ und } x \in N \}.$$

(b) Die **Vereinigung** von $M$ und $N$ ist die Menge

$$M \cup N \ := \{x \ : \ x \in M \text{ oder } x \in N \}.$$

(c) Die **Differenz** von $M$ und $N$ ist die Menge

$$M \setminus N \ := \ M - N := \{x \ : \ x \in M \text{ und } x \notin N \}.$$

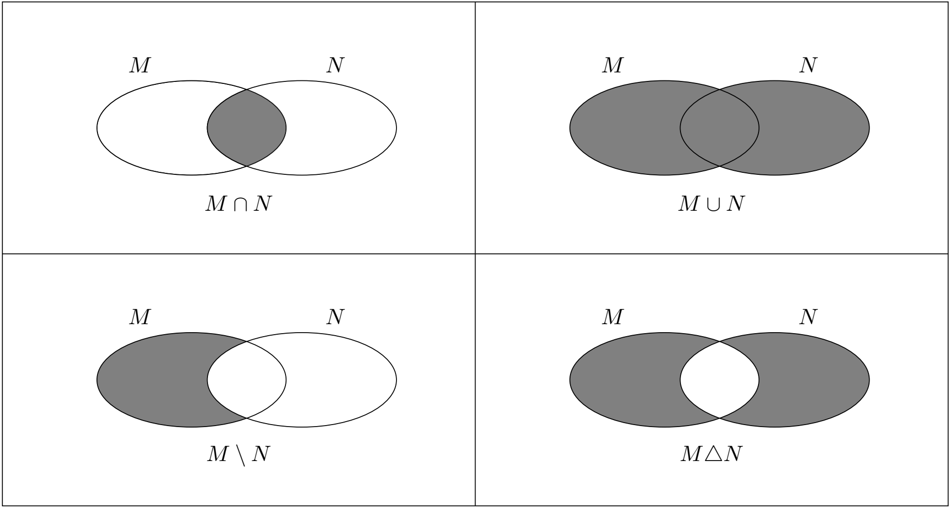
(d) Die **symmetrische Differenz**von $M$ und $N$ ist die Menge

$$M \triangle N \ := \ (M \setminus N) \cup (N \setminus M).$$

Wenn $M$ und $N$ Mengen sind, dann ist

$$M \subseteq M \cup N \text{ und } M \cap N \subseteq M.$$

# Veranschaulichung durch Venn-Diagramme



# Rechenregeln

Seien $M$, $N$, $P$ Mengen. Dann gelten:

(a) **Idempotenz**:

$$M \cap M = M \qquad \text{und} \qquad M \cup M = M.$$

(b) **Kommutativität** :

$$M \cap N = N \cap M \qquad \text{und} \qquad M \cup N = N \cup M.$$

(c) **Assoziativität**:

$$M \cap (N \cap P) = (M \cap N) \cap P \qquad \text{und} \qquad M \cup (N \cup P) = (M \cup N) \cup P.$$

(d) **Absorption**:

$$M \cap (M \cup N) = M \qquad \text{und} \qquad M \cup (M \cap N) = M.$$

(e) **Distributivität**:

$$M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P) \qquad \text{und} \qquad M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P).$$

# Inklusion und Mengengleichheit

**Was haben wir gelernt?**

(a) Wenn wir die Teilmengenbeziehung (oder Inklusion)

$$M \subseteq N$$

zeigen wollen, dann ist es oft von Vorteil für ein **beliebiges** Element $m$ von $M$ nachzuweisen, dass auch $m$ ein Element von $N$ ist.

(b) Wenn wir die Gleichheit

$$M = N$$

zeigen wollen, dann genügt der Nachweis der Teilmengenbeziehungen $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$.

Das **Komplement** einer Menge $M$ (kurz: $\overline{M}$) soll die Menge aller Elemente sein, die **nicht** zu $M$ gehören.

Aber Vorsicht: Wenn wir einfach

$$\overline{M} := \{ x : x \notin M \}$$

setzen, so gilt für die leere Menge $\emptyset$, dass ihr Komplement $\overline{\emptyset}$ **alles** enthält und dann wäre

$$\{ M : M \in \overline{\emptyset} \text{ und } M \text{ ist eine Menge } \}$$

die „Menge aller Mengen", und die kann es nicht geben!

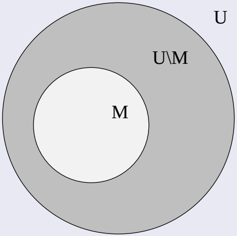
# Komplementbildung (2/2)

Daher betrachten wir Mengen stets innerhalb eines **Universums** $U$, wobei $U$ natürlich selbst eine Menge sein muss.

Für $M \subseteq U$ setzen wir dann

$$\overline{M} := U \setminus M$$

und bezeichnen $\overline{M}$ als das Komplement von $M$ in $U$.



# Rechenregeln für Komplemente

Die Menge $U$ sei unser Universum. Ferner seien $M, N \subseteq U$ Teilmengen von $U$. Dann gelten:

(a) **Doppelte Negation**

$$\overline{(\overline{M})} = M.$$

(b) Die **De Morgansche Regeln**:

$$\overline{M \cap N} = \overline{M} \cup \overline{N} \qquad \text{und} \qquad \overline{M \cup N} = \overline{M} \cap \overline{N}.$$

(c) **Inversionsregeln**:

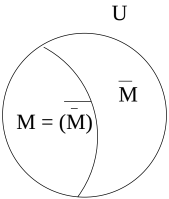
$$M \cap \overline{M} = \emptyset \qquad \text{und} \qquad M \cup \overline{M} = U.$$

(d) **Identitätsregeln**:

$$M \cap U = M \qquad \text{und} \qquad M \cup \emptyset = M.$$

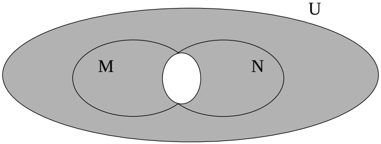
# Und nochmal Venn-Diagramme

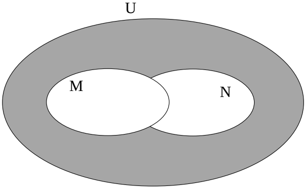
- Doppelte Negation:



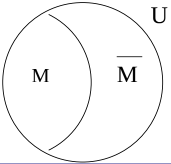

- De Morgansche Regeln:

$$\overline{M \cap N} = \overline{M} \cup \overline{N} \qquad \overline{M \cup N} = \overline{M} \cap \overline{N}$$




- Inversionsregel:



# Mächtigkeit und Kardinalität

(a) Eine Menge heißt **endlich**, wenn sie nur endlich viele Elemente enthält, d.h. wenn es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die Menge genau $n$ Elemente enthält.

(b) Die **Mächtigkeit** (oder **Kardinalität**) $|M|$ einer Menge $M$ ist

$$|M| := \begin{cases} \text{Anzahl der Elemente in } M, & \text{falls } M \text{ endlich ist} \\ \infty \text{ (unendlich)}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- $|\{2, 4, 6\}| = 3$,
- $|\emptyset| = 0$ und $|\{\emptyset\}| = 1$,
- $|\{2, 4, 6, 4\}| = 3$,
- $|\{2, \{a, b\}\}| = 2$,
- $|\mathbb{N}| = \infty$ und $|\mathbb{Z}| = \infty$.

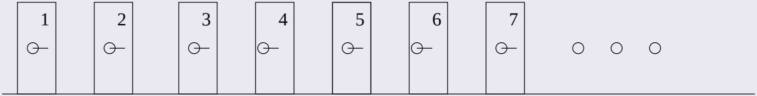
Achtung: $\infty$ ist keine natürliche Zahl, d.h. $\infty \notin \mathbb{N}$, sondern lediglich eine Abkürzung für das Wort „unendlich“.

# Hilbert's Hotel oder was bedeutet „unendlich“?

? Sind $\mathbb{N}_{>0}$ und $\mathbb{N}$ gleichgroß?
Wie steht es mit $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$, bzw. mit $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$?

? Was bedeutet das eigentlich, dass zwei unendliche Mengen gleichgroß sind?

Hilberts Hotel hat unendlich viele Zimmer, die fortlaufend mit $1, 2, 3, \ldots$ nummeriert sind.




- Obwohl alle Zimmer belegt sind, schafft es der Angestellte an der Rezeption, für jeden neuen Gast Platz zu schaffen. Wie?
- Kann man im vollbesetzten Hotel sogar unendlich viele neue Gäste, die mit den Zahlen 1, 2, 3, ... durchnummeriert sind, einquartieren?

# Die Potenzmenge

Die **Potenzmenge** (engl.: power set) einer Menge $M$ (kurz: $\mathcal{P}(M)$) ist die Menge aller Teilmengen von $M$. D.h.:

$$\mathcal{P}(M) := \{ X \ : \ X \subseteq M \}.$$

Man schreibt auch manchmal

$$2^M := \{X \ : \ X \subseteq M\}.$$

Rechnen wir einige Beispiele durch:

- $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.
- $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Insbesondere gilt also: $\mathcal{P}(\emptyset) \neq \emptyset$.

# Potenzmengen: Die wichtigen Fragen

- ? Wie viele Elemente hat die Potenzmenge einer Menge mit $n$ Elementen?
- ? Ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ auch für unendliche Mengen $X$ immer größer als $X$?
- ? Sind $\mathbb{R}$ und $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ gleichgroß?
- ? Können wir sogar „$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ viele“ Gäste in Hilbert's Hotel einquartieren?

# Das kartesische Produkt,
# Paare und Tupel als neue Datentypen

# Paare und Tupel

(a) Für beliebige Objekte $a$ und $b$ bezeichnet $(a, b)$ das **geordnete Paar** mit Komponenten $a$ und $b$.

(b) Für $k \in \mathbb{N}$ und beliebige Objekte $a_1, \ldots, a_k$ bezeichnet $(a_1, \ldots, a_k)$ das **k-Tupel** mit Komponenten $a_1, \ldots, a_k$.

- Für $k = 0$ gibt es genau ein $k$-Tupel, nämlich das **leere Tupel** $()$.

(c) Die **Gleichheit** zweier Tupel ist wie folgt definiert:
F.a. $k, \ell \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_\ell$ gilt:

$$(a_1, \ldots, a_k) = (b_1, \ldots, b_\ell) \;:\Leftrightarrow\; k = \ell \text{ und } a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots a_k = b_k.$$

Beachte den Unterschied zwischen Tupeln und Mengen: z.B.

- $(1, 2) \neq (2, 1)$, aber $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.
- $(1, 1, 2) \neq (1, 2)$, aber $\{1, 1, 2\} = \{1, 2\}$.

# Das kartesische Produkt

(a) Sei $k \geqslant 2$ und sei $M$ eine Menge. Die **k-te Potenz** von $M$ ist die Menge

$$M^k \ := \{\, (m_1, ..., m_k) \ : \ m_1 \in M, \ldots, m_k \in M \,\}.$$

- Für $k = 0$ ist $M^0 = \{()\}$. Also besteht $M^0$ nur aus dem leeren Tupel.
- Für $k = 1$ ist $M^1 = M$.

(b) Das **kartesische Produkt** (bzw. **Kreuzprodukt**) $M \times N$ zweier Mengen $M, N$ ist die Menge

$$M \times N \ := \{\, (m, n) \ : \ m \in M, \ n \in N\}.$$

(c) Sei $k \in \mathbb{N}_{>0}$ und seien $M_1, \ldots, M_k$ Mengen.
Das kartesische Produkt von $M_1, \ldots, M_k$ ist die Menge

$$M_1 \times \cdots \times M_k \ := \{\, (m_1, \ldots, m_k) \ : \ m_1 \in M_1, \ldots, m_k \in M_k\}.$$

# Beispiele (1/2)

Sei $M = \{a, b\}$ und $N = \{1, 2, 3\}$.

Dann gilt:

- $M \times N = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$.
- $M \times \{1\} = \{(a, 1), (b, 1)\}$.
- $M \times \emptyset = \emptyset$.
- $M^2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$.
- $M^1 = \{a, b\}$.
- $\emptyset^0 = \{()\}$, denn $M^0 = \{()\}$ für jede Menge $M$.

# Beispiele (2/2)

- Zur Erinnerung: Die Karten eines Skat-Kartenspiels können wir darstellen durch:

$$\begin{aligned}
\text{KartenArten} &:= \{\text{Kreuz}, \text{Pik}, \text{Herz}, \text{Karo}\},\\
\text{KartenSymbole} &:= \{7, 8, 9, 10, \text{Bube}, \text{Dame}, \text{König}, \text{Ass}\},\\
\text{Karten} &:= \text{KartenArten} \times \text{KartenSymbole}.
\end{aligned}$$

- Wir führen die Mengen

$$\begin{aligned}
\text{Stunden} &:= \{0, 1, 2, ..., 23\},\\
\text{Minuten} &:= \{0, 1, 2, ..., 59\},\\
\text{Sekunden} &:= \{0, 1, 2, ..., 59\}.
\end{aligned}$$

ein und können dann die Menge aller Uhrzeiten repräsentieren durch

$$\text{Uhrzeiten} := \text{Stunden} \times \text{Minuten} \times \text{Sekunden},$$

Das Tupel $(9, 45, 0)$ repräsentiert die Uhrzeit
„9 Uhr, 45 Minuten und 0 Sekunden“.

# Wichtige Notation: Summen- und Produktzeichen

(a) Ist $k \in \mathbb{N}_{>0}$ und sind $z_1, \ldots, z_k$ Zahlen, so schreiben wir

$$\sum_{i=1}^{k} z_i \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_{i \in \{1,\ldots,k\}} z_i,$$

um die Summe $z_1 + \cdots + z_k$ der Zahlen $z_1, \ldots, z_k$ zu bezeichnen.

(b) Wir schreiben

$$\prod_{i=1}^{k} z_i \qquad \text{bzw.} \qquad \prod_{i \in \{1,\ldots,k\}} z_i,$$

um das Produkt $z_1 \cdot \cdots \cdot z_k$ der Zahlen $z_1, \ldots, z_k$ zu bezeichnen.

# Wichtige Notation: Durchschnitt und Vereinigung

(c) Sind $M_1, \ldots, M_k$ Mengen, so schreiben wir

$$\bigcup_{i=1}^{k} M_i \qquad \text{bzw.} \qquad \bigcup_{i\in\{1,\ldots,k\}} M_i$$

um die Vereinigung $M_1 \cup \cdots \cup M_k$ der Mengen $M_1, \ldots, M_k$ zu bezeichnen.

(d) Wir schreiben

$$\bigcap_{i=1}^{k} M_i \qquad \text{bzw.} \qquad \bigcap_{i\in\{1,\ldots,k\}} M_i$$

um den Durchschnitt $M_1 \cap \cdots \cap M_k$ der Mengen $M_1, \ldots, M_k$ zu bezeichnen.

# Die Größe wichtiger Mengen

(a) Seien $M$ und $N$ zwei endliche Mengen. Dann gilt:

$$|M \times N| \;=\; |M| \cdot |N|.$$

(b) Sei $k \in \mathbb{N}_{>0}$ und seien $M_1, \ldots, M_k$ endliche Mengen. Dann gilt:

$$|M_1 \times \cdots \times M_k| \;=\; \prod_{i=1}^{k} |M_i|.$$

(c) Sei $k \in \mathbb{N}$ und sei $M$ eine endliche Menge. Dann gilt:

$$|M^k| \;=\; |M|^k.$$

Beweis: Siehe Tafel. (Nenne Mengen $A, B$ **disjunkt**, wenn $A \cap B = \emptyset$.)

# Alphabete, Worte und Sprachen

# Worte und Alphabete

Sei $A$ eine Menge.

- Gelegentlich fassen wir ein Tupel

  $$w = (a_1, \ldots, a_k) \in A^k \text{ als } \textbf{Wort} \text{ mit „Buchstaben" } a_1, \ldots, a_k \text{ auf.}$$

  Um diese Sichtweise zu betonen, schreiben wir oft $w = a_1 \cdots a_k$.

  - Das leere Tupel $() \in A^0$ heißt auch **leeres Wort** und wird oft mit $\varepsilon$ (epsilon) bezeichnet.

- $A$ wird dann als das **Alphabet** bezeichnet über dem die Worte gebildet werden, und $a_1 \cdots a_k$ wird „**Wort über A**" genannt.
- Die **Länge** $|a_1 \cdots a_k|$ eines Wortes $a_1 \cdots a_k$ ist die Zahl $k$, die Anzahl seiner Buchstaben.
  - Insbesondere ist $|\varepsilon| = 0$, das leere Wort hat also die Länge 0.
- Sind $v = a_1 \cdots a_k$ und $w = b_1 \cdots b_\ell$ zwei Worte über $A$, so ist die **Konkatenation** von $v$ und $w$ das Wort

  $$vw \;:= a_1 \cdots a_k b_1 \cdots b_\ell .$$

# Sprachen

Sei $A$ ein Alphabet. (Also ist $A$ eine Menge.)

(a) Die **Menge aller Worte über A** bezeichnen wir mit $A^*$. Es gilt also:

$$A^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A^k = \{ a_1 \cdots a_k : k \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_k \in A \}.$$

*Beachte:* Wegen $0 \in \mathbb{N}$ und $A^0 = \{()\} = \{\varepsilon\}$ enthält $A^*$ insbesondere das leere Wort.

(b) Die Menge aller **nicht-leeren** Worte über $A$ bezeichnen wir mit $A^+$. Es gilt:

$$A^+ = A^* \setminus \{\varepsilon\} = \{ a_1 \cdots a_k : k \in \mathbb{N}_{>0}, a_1, \ldots, a_k \in A \}.$$

(c) Eine Teilmenge von $A^*$, also eine *Menge von Worten* über A, wird eine **Sprache** über $A$ genannt.

**Bemerkung:** In vielen Büchern werden Sprachen mit dem Buchstaben $L$ (für **L**anguage) oder mit Varianten wie $L'$ oder $L_1$ bezeichnet.

# Natürliche Sprachen

Wir betrachten das Alphabet

$$A_{\text{deutsch}} \quad := \quad \{\text{A, B, \ldots, Z, Ä, Ö, Ü, a, b, \ldots, z, ä, ö, ü, ß,} \\ \text{., ,, :, ;, !, ?, -, \_}\}.$$

Beispiele für Sprachen über $A_{\text{deutsch}}$ sind:

- $L_1 :=$ Menge aller **Worte** der deutschen Sprache.
- $L_2 :=$ Menge aller **grammatikalisch korrekten Sätze** der deutschen Sprache aufgefasst als Zeichenketten über $A_{\text{deutsch}}$,
  - Die Menge aller in Deutsch geschriebenen Bücher, die nur aus grammatikalisch korrekten Sätzen aufgebaut sind, ist eine Teilmenge von

$$L_2^+.$$

# Programmiersprachen

Wir betrachten das Alphabet

$$\text{ASCII} \; := \; \text{die Menge aller ASCII-Symbole}$$

Beispiele für Sprachen über Alphabet ASCII sind:

- $L_1$ := die Menge aller JAVA-Schlüsselwörter,
- $L_2$ := die Menge aller erlaubten Variablennamen in JAVA,
- $L_3$ := die Menge aller syntaktisch korrekten JAVA-Programme.
  Es ist $L_3 \subseteq \text{ASCII}^*$.

# Relationen: Teilmengen von kartesischen Produkten

# Was ist eine Relation?

(a) Sei $k \in \mathbb{N}_{>0}$ und seien $M_1, \dots, M_k$ Mengen. Eine

**Relation R auf $\mathbf{M_1, \dots, M_k}$**

ist eine Teilmenge

$$R \subseteq M_1 \times \cdots \times M_k.$$

Statt $(m_1, \dots, m_k) \in R$ schreiben wir auch $R(m_1, \dots, , m_k)$, denn $R$ ist eine Eigenschaft, die ein Tupel haben kann oder eben nicht.

Die **Stelligkeit** einer solchen Relation ist $k$.

(b) Sei $M$ eine Menge und sei $k \in \mathbb{N}$. Eine

***k*-stellige Relation über M**

ist eine Teilmenge von $M^k$.

# Beispiele für Relationen

(a) $\leqslant$ definiert eine 2-stellige Relation über $\mathbb{R}$: Wir schreiben natürlich $x \leqslant y$ statt $(x, y) \in \leqslant$,

(b) die Teilbarkeit $\mid$ ist eine 2-stellige Relation über $\mathbb{N}$.

(c) Die Inklusion $\subseteq$ und die Gleichheit $=$ sind 2-stellige Relationen über Mengen.

(d) Korrekte Datumsangaben: Um Datumsangaben im Format (Tag, Monat, Jahr) anzugeben, nutzen wir die Wertebereiche (oder Mengen)

$$\begin{aligned}\text{TagWerte} &:= \{1, 2, \ldots, 31\}\\ \text{MonatsWerte} &:= \{1, 2, \ldots, 12\}\\ \text{JahresWerte} &:= \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Die Menge "**Gültig**" aller gültigen Datumsangaben ist dann eine **Teilmenge** von

$$\text{TagWerte} \times \text{MonatsWerte} \times \text{JahresWerte},$$

d.h. eine **Relation** auf TagWerte, MonatsWerte, JahresWerte,

- zu der beispielsweise das Tupel $(23, 6, 1912)$[1] gehört,
- nicht aber das Tupel $(30, 2, 1912)$.

[1] Der 23. Juni 1912 ist der Geburtstag von **Alan M. Turing**, einem der einflussreichsten Pioniere der Informatik.

## Funktionen

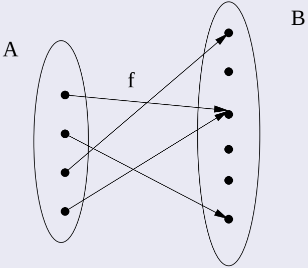
# Was ist eine Funktion von $A$ nach $B$?

Seien $A$, $B$ Mengen. Eine **Funktion** (oder **Abbildung**) von $A$ nach $B$ ist eine 2-stellige Relation $f$ auf $A$ und $B$,

$$\text{es gilt also } f \subseteq A \times B,$$

mit der Eigenschaft, dass für jedes $a \in A$ **genau ein** $b \in B$ mit $(a, b) \in f$ existiert.

*Anschaulich:*



# Funktionen: Schreibweisen

(a) Wir schreiben $\mathbf{f} \colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$,
um auszudrücken, dass $f$ eine Funktion von $A$ nach $B$ ist.

(b) Ist $f : A \to B$ und ist $a \in A$, so bezeichnet

$$\mathbf{f}(\mathbf{a})$$

das (eindeutig bestimmte) $b \in B$ mit $(a, b) \in f$.
Wir schreiben $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ anstatt $(a, b) \in f$.

(c) Für $f : A \to B$ und $A' \subseteq A$ sei

$$f(A') \ := \ \{ \ f(a) \ : \ a \in A' \ \}.$$

(d) Die Menge aller Funktionen von $A$ nach $B$ bezeichnen wir mit

$$\mathbf{Abb}(\mathbf{A}, \mathbf{B}).$$

$\mathrm{Abb}(A, B)$ wird auch häufig mit $A \to B$ oder mit $B^A$ bezeichnet.

# Definitions- und Bildbereich

Sei $f\colon A \to B$.

(a) Der **Definitionsbereich** von $f$ ist die Menge

$$\mathrm{Def}(f) := A.$$

(b) Der **Bildbereich** von $f$ ist die Menge $B$.

(c) Das **Bild** von $f$, genauer: das Bild von $A$ unter $f$, ist die Menge

$$\mathrm{Bild}(f) \ := f(A) \ = \ \{ f(a) \ : \ a \in A \}.$$

Beachte, dass stets $\mathrm{Bild}(f) \subseteq B$ gilt.

# Partielle Funktionen

Eine Funktion $f$ mit

$$\mathrm{Def}(f) \subseteq A \text{ und } \mathrm{Bild}(f) \subseteq B$$

heißt eine

**partielle Funktion von $A$ nach $B$.**

- Im Gegensatz zu partiellen Funktionen sagt man, dass eine Funktion $f$ mit

  $$A \subseteq \mathrm{Def}(f) \text{ und } \mathrm{Bild}(f) \subseteq B$$

  eine **totale Funktion** von $A$ nach $B$ ist.
- Sprechen wir von „Funktionen“, ohne sie explizit als „partiell“ zu bezeichnen, so meinen wir immer „totale“ Funktionen.

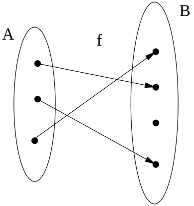
# Eigenschaften von Funktionen

Sei $f: A \to B$.

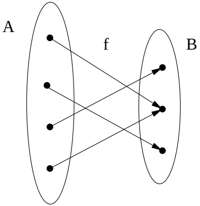
(a) $f$ heißt **injektiv**, falls es für jedes $b \in B$ **höchstens** ein $a \in A$ mit $f(a) = b$ gibt.

(b) $f$ heißt **surjektiv**, falls es für jedes $b \in B$ **mindestens** ein $a \in A$ mit $f(a) = b$ gibt.

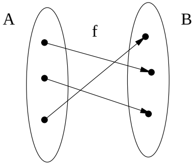
(c) $f$ heißt **bijektiv**, falls es für jedes $b \in B$ **genau ein** $a \in A$ mit $f(a) = b$ gibt.




injektiv,
nicht surjektiv,
nicht bijektiv




nicht injektiv,
surjektiv,
nicht bijektiv




injektiv,
surjektiv,
bijektiv

# Funktionen: Zwei Beobachtungen

(a) Für jede Funktion $f\colon A \to B$ gilt:

$$f \text{ ist bijektiv} \iff f \text{ ist injektiv und surjektiv.}$$

(b) Seien $A$ und $B$ **endliche** Mengen. Dann gilt:

$$|A| = |B| \iff \text{es gibt eine bijektive Funktion von } A \text{ nach } B.$$

$A$ und $B$ seien **beliebige** Mengen. Man sagt, dass

zwei Mengen $A, B$ genau dann gleichgroß sind,

wenn es eine Bijektion $f$ gibt mit

$$f : A \to B.$$

# Wie groß ist die Potenzmenge einer endlichen Menge?

(a) Für jede Menge $M$ gibt es eine bijektive Funktion

$$f : \mathcal{P}(M) \to \mathrm{Abb}(M, \{0, 1\}).$$

(b) Sei $B$ eine Menge, $A$ eine endliche Menge und sei $k := |A|$.
Dann gibt es eine bijektive Funktion

$$f : \mathrm{Abb}(A, B) \to B^k.$$

Beweis: siehe Tafel.

Seien $A$, $B$, $M$ endliche Mengen. Dann gilt:

(a) $|\mathrm{Abb}(A, B)| = |B|^{|A|}$.

(b) $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.

Beweis: siehe Tafel.

# Beispiele einiger Funktionen

1. Die Funktion „augenfarbe“ weist jedem Hörer der heutigen Veranstaltung ihre/seine Augenfarbe zu.
   - Der Definitionsbereich ist die Menge der Hörer der heutigen Veranstaltung.
   - Der Bildbereich ist die Menge $\{ \text{blau}, \text{grün}, \text{braun} \}$,
   - das Bild von „augenfarbe“ stimmt in aller Wahrscheinlichkeit mit dem Bildbereich überein.

   Die Funktion „augenfarbe“ ist surjektiv, aber nicht injektiv und damit natürlich auch nicht bijektiv.
2. Sei $M$ eine Menge. Die Identitätsfunktion $\mathrm{id} : M \to M$ bildet jedes Element $m \in M$ auf das Element $m$ ab, es gilt also $\mathrm{id}(m) = m$.
   - Definitionsbereich, Bildbereich und Bild stimmen mit $M$ überein.

   „id“ ist bijektiv.
3. Die Funktion $\mathrm{quadrat} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird durch $\mathrm{quadrat}(x) = x^2$ definiert.
   - Definitionsbereich und Wertebereich stimmen mit der Menge der reellen Zahlen überein.
   - Das Bild von „quadrat“ ist die Menge der nicht-negativen rellen Zahlen.

   „quadrat“ ist weder surjektiv noch injektiv und damit erst recht nicht bijektiv.