

# Diskrete Modellierung

Wintersemester 2014/2015

## Übungsblatt 12

**Abgabe:** bis 3. Februar 2015, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 114 und 115 in der Robert-Mayer-Str. 11–15)

### Aufgabe 1: (25 Punkte)

Der Fernsehsender DISCOMOD hat sich auf Sendungen zum Thema Tanzen spezialisiert. Markenzeichen dieses Senders sind der eigens dafür erfundene Tanz *Mod-Flotttrott* und der dazu gehörende Wettbewerb um den Tanzmeisterpokal *Mod-Flotttrott-Pott*.

Der Mod-Flotttrott verwendet dabei die folgenden Grundschrirte, die mit Buchstaben aus dem Alphabet  $\Sigma := \{\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{z}\}$  bezeichnet werden:

- in die Hände klatschen (abgekürzt als  $\mathbf{k}$ ),
- einen Sprung nach links (abgekürzt als  $\mathbf{l}$ ),
- einen Sprung nach rechts (abgekürzt als  $\mathbf{r}$ ),
- einen Schritt vor (abgekürzt als  $\mathbf{v}$ ),
- einen Schritt zurück (abgekürzt als  $\mathbf{z}$ ).

Natürlich dürfen diese Grundschrirte nicht vollkommen frei kombiniert werden. Eine Folge von Grundschrirten ist genau dann ein korrekter Mod-Flotttrott-Tanz, wenn sie den folgenden Regeln genügt:

- Einmal in die Hände klatschen ist ein korrekter Tanz.
- Einmal in die Hände klatschen und dann einen korrekten Tanz tanzen ist ebenfalls ein korrekter Tanz.
- Einen Sprung nach links, einen korrekten Tanz tanzen und dann einen Sprung nach rechts ist ebenfalls ein korrekter Tanz.
- Einen Schritt vor, noch einen Schritt vor, einen Schritt zurück, einen korrekten Tanz tanzen und dann einen Schritt zurück ist ebenfalls ein korrekter Tanz.

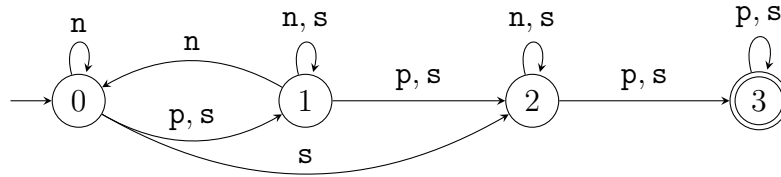
Dabei sei  $L$  definiert als die Sprache aller Wörter aus  $\Sigma^*$ , die einem korrekten Tanz entsprechen. Beispielsweise gilt  $\mathbf{k} \in L$  und  $\mathbf{vzkkz} \in L$ , und außerdem auch  $\mathbf{lr} \notin L$  und  $\mathbf{vzv} \notin L$ .

Dieses Jahr wird das Team der Schiedsrichter für die Tanzmeisterschaft durch einen Roboter ergänzt, den *Mod-Flotttrott-Bot*, der die Tänze vollautomatisch bewertet (nämlich als *Hot!* oder *Schrott!*). Allerdings wurde der Mod-Flotttrott-Bot Opfer eines Mod-Flotttrott-Bot-Komplots: Spione eines anderen Senders haben die Definition der korrekten Tänze gelöscht. Glücklicherweise wird der Mod-Flotttrott-Bot durch kontextfreie Grammatiken programmiert, so dass Sie den Leuten von DISCOMOD helfen können (und diese so vor Mod-Flotttrott-Bot-Spott retten).

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik  $G$  an, für die  $L(G) = L$  gilt. Sie müssen die Korrektheit von  $G$  nicht beweisen.

**Aufgabe 2:****(25 Punkte)**

In dieser Aufgabe betrachten wir noch einmal die  $WG^1$  aus Aufgabe 1 auf Blatt 11. Einige Monate später haben sich dort einige Dinge geändert: Inzwischen isst keiner mehr Tintenfisch-Burger, außerdem wurden die Putzbedingungen unzählige Male nachverhandelt und angepasst. Anstelle des ursprünglichen NFA  $A_1$  (den Sie letzte Woche konstruiert haben) wird nun der folgende NFA  $A_2$  verwendet, der offensichtlich eine andere Sprache definiert als  $A_1$ :



Leo vermutet, dass dieser NFA  $A_2$  eine unbeabsichtigte Eigenschaft haben könnte: Vielleicht ist es möglich, eine Folge von gekochten Gerichten zu finden, so dass die Küche nie mehr geputzt werden muss. Allerdings finden die Fünf diesen NFA ziemlich unübersichtlich, so dass sie diese Frage nicht direkt beantworten wollen.

- (a) Wandeln Sie  $A_2$  mittels der Potenzmengenkonstruktion in einen äquivalenten DFA  $A$  um.  
 (b) Existiert ein Wort  $w \in \{n, s, p\}^*$ , so dass  $wz \notin L(A)$  für alle  $z \in \{n, s, p\}^*$  gilt?

**Aufgabe 3:****(25 Punkte)**

- (a) Gegeben seien die folgenden regulären Ausdrücke über dem Alphabet  $\Sigma = \{0, 1\}$ :

$$R_1 = 0(1(0|1))^* \qquad R_2 = (\varepsilon|00|01|10)^*(0|1)$$

- (i) Gehören die folgenden Worte zur Sprache  $L(R_1)$  bzw.  $L(R_2)$ ?

$$w_1 = \varepsilon \qquad w_2 = 0 \qquad w_3 = 010 \qquad w_4 = 01101$$

- (ii) Geben Sie ein möglichst kurzes Wort  $w$  an, so dass  $w \in L(R_1)$  und  $w \notin L(R_2)$ .

Sie müssen Ihre Antworten nicht begründen.

- (b) Geben Sie für die folgenden Sprachen je einen möglichst kurzen regulären Ausdruck an, der die Sprache beschreibt.

- (i)  $L_1 := \{w \in \{a, b\}^* : |w| \text{ ist ungerade}\}$   
 (ii)  $L_2 := \{w \in \{a, b\}^* : w \text{ endet auf } ab\}$   
 (iii)  $L_3 := \{w \in \{a, b\}^* : \text{in } w \text{ kommt } bb \text{ nicht als Teilwort vor}\}$

Sie müssen die Korrektheit der regulären Ausdrücke nicht beweisen.

**Aufgabe 4:****(25 Punkte)**

Wir betrachten die kontextfreie Grammatik  $G = (\Sigma, V, S, P)$  über dem Alphabet  $\Sigma = \{0, 1\}$  mit der Variablenmenge  $V = \{S, T\}$  und den Produktionen

$$P = \{S \rightarrow 0S1S \mid T \mid \varepsilon, \\ T \rightarrow 0T \mid 0\}.$$

- (a) Geben Sie für jedes der folgenden Wörter  $w_i$  an, ob  $w_i \in L(G)$  gilt.

$$w_1 = 00 \qquad w_2 = 0110 \qquad w_3 = 010110 \qquad w_4 = 00100$$

- (b) Geben Sie eine Ableitung für  $w_5 = 01010$  sowie einen Ableitungsbaum für  $w_6 = 010001$  an.

Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen.

<sup>1</sup>Zur Erinnerung: Die fünf Studierenden hatten die Umsetzung ihres Putzplans als NFA modelliert.