Goethe-Universität Frankfurt am Main 20. Januar 2015
Arbeitsgruppe Theoretische Informatik, Institut für Informatik
Dr. Dominik Freydenberger, Hannes Seiwert, Prof. Dr. Georg Schnitger

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 11

Abgabe: *bis 27. Januar 2015, 8.[15] Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 114 und 115 in der Robert-Mayer-Str. 11–15)*

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Die fünf Studierenden Leo, Uli, Robin, Kaya und Sascha wohnen seit einiger Zeit zusammen in einer WG und ernähren sich ausschließlich von Nudelsuppe (kurz: $\mathtt{n}$), Pizza (kurz: $\mathtt{p}$), Spaghetti mit Tomatensauce (kurz: $\mathtt{s}$) und Tintenfisch-Burgern (kurz: $\mathtt{t}$). Dabei kommt es oft zu leidenschaftlichen Diskussionen, wie häufig die Küche geputzt werden muss.

(a) Da die vier Gerichte die Küche unterschiedlich stark verschmutzen und weil niemand gerne putzen will, einigen sich die Fünf auf das folgende Verfahren: Die Folge der seit dem letzten Putzen gekochten Gerichte wird als ein Wort w über dem Alphabet $\Sigma := \{\mathtt{n}, \mathtt{p}, \mathtt{s}, \mathtt{t}\}$ aufgefasst. Jeden Sonntag Nachmittag überprüfen sie das entstandene Wort w auf die folgenden drei Bedingungen:

(i) Es ist mindestens dreimal Pizza zubereitet worden (d. h. $|w|_{\mathtt{p}} \geq 3$).

(ii) Es sind mindestens zweimal Spaghetti zubereitet worden (d. h. $|w|_{\mathtt{s}} \geq 2$).

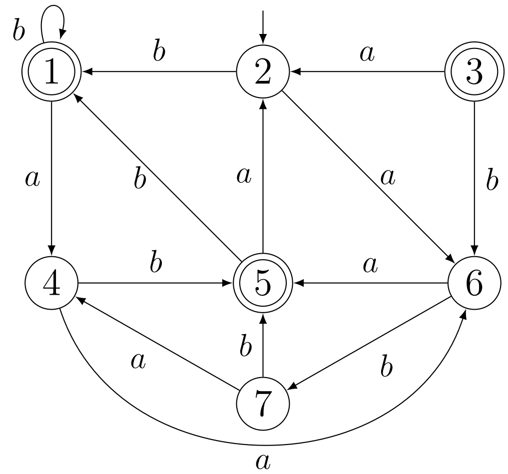
(iii) Es wurden mindestens einmal Tintenfisch-Burger zubereitet (d. h. $|w|_{\mathtt{t}} \geq 1$).

Wenn das Wort w *mindestens* eine dieser drei Bedingungen erfüllt, muss die Küche geputzt werden. Da die Fünf in ihrem Studium gelernt haben, dass NFAs oft kompaktere Definitionen erlauben als DFAs, möchten sie w durch einen NFA überprüfen. Konstruieren Sie einen NFA A_1, so dass $L(A_1)$ genau die Wörter aus Σ^* enthält, die mindestens eine der drei obigen Bedingungen erfüllen. Dabei darf A_1 nicht mehr als fünf Zustände haben. Sie müssen die Korrektheit von A_1 nicht beweisen.

(b) Diese Teilaufgabe wurde auf Blatt 12 verschoben. Die Gesamtpunktzahl für Aufgabe 1 beträgt weiterhin 25 Punkte.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Der vollständige DFA $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$, $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $q_0 = 2$ und $F = \{1, 3, 5\}$ sei durch folgende grafische Darstellung gegeben:



Minimieren Sie A, d.h. finden Sie einen äquivalenten vollständigen DFA A', dessen Zustandszahl kleinstmöglich ist. Verwenden Sie dazu den Algorithmus aus der Vorlesung und geben Sie Zwischenschritte an.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Nerode, dass die folgenden drei Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ nicht-regulär sind.

$$L_1 = \{a^n b^m c^{n+m} : n, m \in \mathbb{N}\}$$

$$L_2 = \{w \in \Sigma^* : w \text{ ist ein Palindrom.}\}$$

$$L_3 = \{a^{(n^2)} : n \in \mathbb{N}\}$$

Hinweis: Finden Sie jeweils eine unendliche Menge von Wörtern, die paarweise nicht-äquivalent bzgl. der Nerode-Relation sind, und weisen Sie die Nicht-Äquivalenz durch Angabe geeigneter Zeugen nach.

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Für $n \geq 2$ definieren wir die Sprache $L_n := \{a, b\}^* \{b\} \{a, b\}^{n-1}$.

Anschaulich gesprochen enthält L_n die Wörter über Σ, bei denen der n-letzte Buchstabe ein b ist. Unser Ziel ist, zu zeigen, dass die Sprachen L_n durch NFAs wesentlich kompakter definiert werden können als durch DFAs. Wir zeigen dies in zwei Schritten:

(a) Für jedes $n \geq 2$ existiert ein NFA A_n mit $L(A_n) = L_n$, und A_n hat $n + 1$ Zustände.

(b) Wir möchten nun beweisen, dass jeder vollständige DFA für die Sprache L_n mindestens 2^n Zustände hat (also enorm groß ist). Zeigen Sie dazu: Für jedes $n \geq 2$ ist $\text{Index}(L_n) \geq 2^n$.

Hinweis: Finden Sie für jedes $n \geq 2$ eine Menge von 2^n Wörtern, die paarweise nicht-äquivalent bzgl. der Nerode-Relation sind. Weisen Sie die Nicht-Äquivalenz durch Angabe geeigneter Zeugen nach.

Bonusaufgabe: **(20 Extrapunkte)**

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

Die Sprache $L := \{a^n w b^n : m, n \in \mathbb{N}, m \geq n, w \in \Sigma^m\}$ ist regulär.