Goethe-Universität Frankfurt am Main 13. Januar 2015
Arbeitsgruppe Theoretische Informatik, Institut für Informatik
Dr. Dominik Freydenberger, Hannes Seiwert, Prof. Dr. Georg Schnitger

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 10

Abgabe: *bis 20. Januar 2015, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 114 und 115 in der Robert-Mayer-Str. 11–15)*

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Der Radiosender Radio Mod! führt zum Beginn des neuen Jahres eine 2014er-Retro-Woche durch. Teil dieser Woche ist das Rückblick-Marathon-Gewinnspiel. Dieses läuft folgendermaßen ab: Durch eine Internet-Abstimmung wurden die drei beliebtesten Lieder des Vorjahres bestimmt, nämlich *Automatenlos durch die Nacht*, sowie *Beweist Du wieviel Sternlein stehen (Dancefloor Remix)* und *Un-Markov-Chain My Heart*. Zwischen Mitternacht und sechs Uhr morgens werden nun ausschließlich diese drei Lieder gespielt; dabei müssen die Zuhörenden die Reihenfolge der Lieder aufmerksam verfolgen. Zu Beginn der Sendung wird eine Reihenfolge von Liedern mitgeteilt. Sobald Lieder in dieser Reihenfolge abgespielt wurden, gewinnt der erste Anruf[1] bei Radio Mod! einen Preis, nämlich 10000 Euro oder einen Elefanten.

Lester wünscht sich schon lange einen Elefanten – allerdings sind die Bedingungen des Gewinnspiels doch recht qualvoll (nicht nur wegen der Uhrzeit, sondern auch weil die Lieder seinem Musikgeschmack überhaupt nicht entsprechen). Daher fragt er seine schlaue Schwester Eliza um Rat. Um Lester das Verfolgen der Lieder einfacher zu machen, erstellt Eliza ihm jeweils einen deterministischen endlichen Automaten über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{U}\}$ (die Buchstaben stehen dafür jeweils für die Anfangsbuchstaben der Lieder) – so muss sich Lester wenigstens nicht bisher gehörten Lieder merken, sondern nur den aktuellen Zustand des DFA (das geht zur Not mit einem Finger und ist gerade zu später Stunde deutlich einfacher).

(a) In der ersten Nacht führt die folgende Reihenfolge von Liedern zu einer Gewinnchance: Zuerst *Automatenlos*, dann *Beweist Du* und abschließend *Un-Markov-Chain My Heart*. Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten für die Sprache

$$L_1 := \{w \in \Sigma^* : w \text{ endet auf } \mathtt{ABU}\}.$$

Verwenden Sie so wenige Zustände wie möglich. Sie müssen die Korrektheit nicht beweisen.

(b) In der zweiten Nacht wird die Schwierigkeit ein wenig erhöht. Nun führt die folgende Reihenfolge von Liedern zu einer Gewinnchance: Zuerst *Automatenlos*, dann *Beweist Du*, dann wieder *Automatenlos* und abschließend *Un-Markov-Chain My Heart*. Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten für die Sprache

$$L_2 := \{w \in \Sigma^* : w \text{ endet auf } \mathtt{ABAU}\}.$$

Verwenden Sie so wenige Zustände wie möglich. Sie müssen die Korrektheit nicht beweisen.

[1] Tarifhinweis: 50 Cent/Anruf aus dem Festnetz, ggf. abweichende Kosten aus dem Mobilnetz.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Mit Hilfe von endlichen Automaten soll die Teilbarkeit von natürlichen Zahlen in Darstellungen zu einer Basis b untersucht werden. Für $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$ betrachten wir das Eingabealphabet $\Sigma_b := \{0, 1, \ldots, b-1\}$. Wir identifizieren jedes Wort $w = w_0 w_1 w_2 \cdots w_{|w|-1} \in \Sigma_b^*$ mit der natürlichen Zahl

$$z_b(w) := \begin{cases} \sum_{i=0}^{|w|-1} \left(w_i \cdot b^{|w|-(i+1)} \right) & \text{, falls } w \neq \varepsilon \\ 0 & \text{, falls } w = \varepsilon. \end{cases}$$

Zum Beispiel ist $z_2(101) = 5$, $z_3(101) = 10$ und $z_4(101) = 17$, sowie $z_3(12) = 5$ und $z_4(12) = 6$. Geben Sie für jede der folgenden drei Sprachen jeweils einen endlichen Automaten mit möglichst wenigen Zuständen an, der genau diese Sprache akzeptiert.

$$\begin{aligned} L_1 &:= \{w \in \Sigma_2^* \, : \, z_2(w) \text{ ist durch 4 teilbar}\} \\ &= \{w \in \{0,1\}^* \, : \, \text{ex. } k \in \mathbb{N} \text{ mit } z_2(w) = 4 \cdot k\}, \\ L_2 &:= \{w \in \Sigma_3^* \, : \, z_3(w) \text{ ist durch 2 teilbar}\} \\ &= \{w \in \{0,1,2\}^* \, : \, \text{ex. } k \in \mathbb{N} \text{ mit } z_3(w) = 2 \cdot k\}, \\ L_3 &:= \{w \in \Sigma_4^* \, : \, z_4(w) \text{ ist durch 3 teilbar}\} \\ &= \{w \in \{0,1,2,3\}^* \, : \, \text{ex. } k \in \mathbb{N} \text{ mit } z_4(w) = 3 \cdot k\}. \end{aligned}$$

Sie müssen die Korrektheit Ihrer Antwort nicht beweisen.

Aufgabe 3: **(30 Punkte)**

(a) Betrachten Sie die Relation $R = \{(a,a), (b,c), (c,d), (d,c)\}$ über der Menge $A = \{a,b,c,d\}$. Welche Paare $(x,y) \in A \times A$ müssen zu R mindestens hinzugefügt werden, um Relationen R_r, R_s, R_t, R_e zu erhalten, sodass

- **(i)** R_r reflexiv ist?
- **(ii)** R_s symmetrisch ist?
- **(iii)** R_t transitiv ist?
- **(iv)** R_e eine Äquivalenzrelation ist? Geben Sie auch den Index und die Äquivalenzklassen von R_e an.

Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen.

(b) Betrachte das Alphabet $\Sigma = \{a,b\}$ und die Äquivalenzrelation $Anagramm = \{(w_1, w_2) \in \Sigma^5 \times \Sigma^5 \, : \, w_2 \text{ entsteht aus } w_1 \text{ durch Umordnen der Buchstaben}\}$ über der Menge aller Wörter mit genau fünf Buchstaben.

- **(i)** Geben Sie die Äquivalenzklasse von $aabab$ an, d.h. geben Sie $[aabab]_{Anagramm}$ an.
- **(ii)** Geben Sie für jede Äquivalenzklasse einen Vertreter an.
- **(iii)** Geben Sie eine Äquivalenzklasse mit möglichst wenigen Elementen an.
- **(iv)** Geben Sie den Index an.

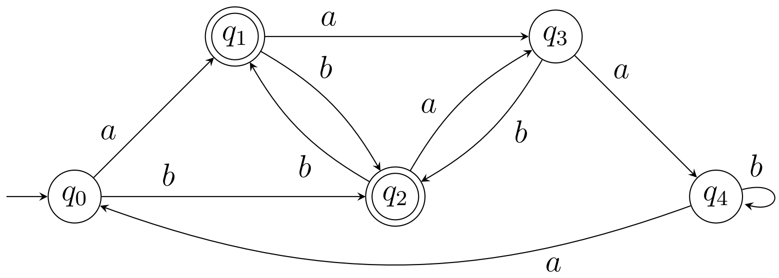
Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen.

(c) Geben Sie für jede der folgenden Relationen R_i über der Menge A_i an, ob es sich um eine Äquivalenzrelation handelt.

- **(i)** $A_1 = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $R_1 = \{(a,b) \in A_1 \times A_1 : a \cap b = \emptyset\}$
- **(ii)** $A_2 = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $R_2 = \{(a,b) \in A_2 \times A_2 : a \cap b \neq \emptyset\}$
- **(iii)** $A_3 = \mathbb{Z}$ und $R_3 = \{(x,y) \in A_3 \times A_3 : x - y \text{ ist durch 3 teilbar.}\}$

Aufgabe 4: **(20 Punkte)**

Der DFA $A := (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$ und $F = \{q_1, q_2\}$ sei durch folgende Grafik gegeben:



Geben Sie für jedes Paar $\{q_i, q_j\}$ mit $q_i, q_j \in Q$ und $i \neq j$ an, ob $q_i \equiv_A q_j$ gilt (hierbei bezeichnet $\equiv_A$ die Verschmelzungsrelation). Falls q_i und q_j nicht äquivalent sind, so geben Sie außerdem ein Wort $w \in \Sigma^*$ an, das ein Zeuge für diese Nicht-Äquivalenz ist.