

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 9

Abgabe: bis 13. Januar 2015, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 114 und 115 in der Robert-Mayer-Str. 11–15)

Aufgabe 1:

(25 Punkte)

Auf dem Weihnachtsmarkt von Großdorf sollen insgesamt 8 Stände rund um den Marktplatz, den sogenannten *Großmarktplatz*, arrangiert werden. Die 8 Stände setzen sich folgendermaßen zusammen:

- Ein Stand, in dem die traditionelle **W**eihnachtskrippe aufgebaut ist.
- Zwei Stände, an denen Weihnachtsschmuck verkauft wird; einer bietet **H**olzschmuck aus dem Erzgebirge an, der andere dekorative **Z**ombies im Weihnachtsmannkostüm.
- Zwei Glühweinstände (einer von Herrn **M**ax, der andere von Frau **P**eters).
- Drei Essensstände; einer davon verkauft **K**artoffelpuffer, ein anderer glutenfreie **T**ofuspieß und der dritte **B**ratwürste vom Holzkohlegrill.

Bei der Platzierung der 8 Stände um den Großmarktplatz ist Folgendes zu beachten: Der Zombiestand und der Tofustand sind vielen älteren Bewohnern von Großdorf ein wenig suspekt und dürfen daher nicht neben der Weihnachtskrippe platziert werden. Frau Peters und Herr Max betrachten jede Art von Lebensmitteln als Konkurrenz zu ihrem Angebot – die Glühweinstände dürfen daher nicht nebeneinander stehen, außerdem darf kein Glühweinstand neben einem Essensstand stehen. Der Besitzer des Holzschmuckstandes ist strenger Veganer und fordert deshalb, dass sein Stand auf keinen Fall neben dem Stand mit den Bratwürsten steht. Dafür weigert sich die Besitzerin des Bratwurststandes, ihren Stand neben den mit den Tofuspießen zu stellen. Außerdem muss beachtet werden, dass Herr Max und die Betreiberin des Holzschmuckstandes ihre Stände nicht neben den Zombiestand stellen wollen, da sie diesen albern und unweihnachtlich finden. Schließlich will die Besitzerin des Kartoffelpufferstands jenen nicht neben dem Holzschmuckstand aufbauen, da sie sich daran stört, dass dessen Besitzerin permanent den Verfall der Traditionen beklagt.

- Stellen Sie den Konfliktgraph auf, in dem die Stände durch Knoten repräsentiert werden und eine Kante zwischen zwei Knoten anzeigt, dass die entsprechenden Stände nicht nebeneinander platziert werden können. Verwenden Sie zur Beschriftung der Knoten jeweils die fett gedruckten Buchstaben (z. B. **P** für den Stand von Frau Peters).
- Um eine Platzierung der Stände zu bestimmen gehen Sie wie folgt vor:
 - Geben Sie das Komplement des Konfliktgraphen an.
 - Geben Sie einen Hamilton-Kreis im Komplement des Konfliktgraphen an.
 - Geben Sie eine Platzierung der 8 Stände rund um den Großmarktplatz an, mit der alle zufrieden sind.

- (c) Die Erfahrungen der letzten Jahre haben gezeigt, dass es selbst bei einer solchen Platzierung immer wieder zu Streit kommt. Die Bürgermeisterin von Großdorf überlegt daher, den Weihnachtsmarkt auf mehrere Standorte in Großdorf zu verteilen. Statt die Stände, zwischen denen ein Konflikt vorliegt, nicht nebeneinander zu stellen, sollen diese an unterschiedlichen Standorten aufgestellt werden. Neben dem Großmarktplatz bieten sich in Großdorf noch der *Kleinmarktplatz* und der *Restmarktplatz* als Standorte an. Nach ein wenig Herumprobieren ist sich die Bürgermeisterin allerdings nicht sicher, ob drei Standorte für diese Aufgabe ausreichen. Bestimmen Sie die chromatische Zahl des Konfliktgraphen. Wie viele Standorte sind mindestens notwendig, um alle beschriebenen Konflikte auszuschließen? Wie viele Standorte reichen aus?

Aufgabe 2:

(25 Punkte)

Um Speicherplatz oder Bandbreite zu sparen, werden Dateien in vielen Anwendungsfällen komprimiert: Dabei wird die Originaldatei durch ein *Kompressionsverfahren* in eine kompaktere Form gebracht (*komprimiert*); vor der Verwendung wird die Datei wieder *dekomprimiert*.

Dabei unterscheidet man zwei Arten von Kompressionsverfahren: Bei der *verlustbehafteten Kompression*, die zum Beispiel bei den Formaten MP3 und JPEG verwendet wird, wird nur ein Teil der Information der Originaldatei gespeichert. Dadurch können hohe Kompressionsraten erzielt werden, allerdings lässt sich die Originaldatei nicht identisch wiederherstellen. Im Gegensatz dazu kann bei der *verlustfreien Kompression* die Originaldatei exakt wiederhergestellt werden. Verfahren zur verlustfreien Kompression werden zum Beispiel für die Dateiformate RAR und ZIP und für Bildformate wie PNG und GIF eingesetzt.

Formal gesehen kann jedes Kompressionsverfahren als eine Funktion $f: \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ verstanden werden: Sowohl die Originaldatei als auch das Resultat sind im Computer als Wörter aus $\{0, 1\}^*$ gespeichert, und das Kompressionsverfahren f bildet jede Originaldatei $x \in \{0, 1\}^*$ auf eine komprimierte Datei $f(x) \in \{0, 1\}^*$ ab. Bei verlustfreien Kompressionsverfahren muss diese Funktion außerdem injektiv sein: Damit zwei unterschiedliche Dateien $x, y \in \{0, 1\}^*$ mit $x \neq y$ wieder eindeutig entpackt werden können, muss $f(x) \neq f(y)$ gelten.

Um praktisch nützlich zu sein, muss ein Kompressionsverfahren natürlich noch weitere Eigenschaften erfüllen; trotzdem können wir schon anhand dieser vereinfachten Sichtweise die Grenzen der Mächtigkeit von verlustfreien Kompressionsverfahren untersuchen. Wir gehen dabei in zwei Schritten vor:

- (a) Beweisen Sie: Sei f eine injektive Funktion $f: \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$. Existiert ein Wort $x \in \{0, 1\}^*$ mit $|f(x)| < |x|$, so existiert auch ein Wort $y \in \{0, 1\}^*$ mit $|f(y)| > |y|$.
- (b) Welche Erkenntnis zu verlustfreien Kompressionsverfahren können Sie aus der Aussage in Teilaufgabe (a) ableiten?

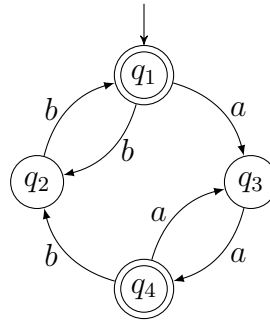
Aufgabe 3:

(25 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit mindestens zwei Knoten, so dass für alle $u, v \in V$ mit $u \neq v$ entweder $(u, v) \in E$ oder $(v, u) \in E$ gilt. Beweisen Sie durch vollständige Induktion über die Anzahl der Knoten von G , dass G einen Hamilton-Weg besitzt.

Aufgabe 4:**(25 Punkte)**

Der deterministische endliche Automat A über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ sei durch die folgende graphische Darstellung definiert:



(a) Geben Sie Folgendes für A an:

(i) die Menge der Zustände,

(iii) die Menge der akzeptierenden Zustände,

(ii) den Startzustand,

(iv) die Übergangsfunktion.

(b) Geben Sie die folgenden Funktionswerte der erweiterten Übergangsfunktion an:

(i) $\hat{\delta}(q_1, w_1)$, wobei $w_1 = aabb$,

(iii) $\hat{\delta}(q_1, w_3)$, wobei $w_3 = abba$,

(ii) $\hat{\delta}(q_1, w_2)$, wobei $w_2 = aabba$,

(iv) $\hat{\delta}(q_3, w_3)$, wobei $w_3 = abba$.

(c) Welche der folgenden Wörter werden von A akzeptiert, welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten.

$$w_1 = aaq_4$$

$$w_2 = bbbbaa$$

$$w_3 = abaabbbb$$

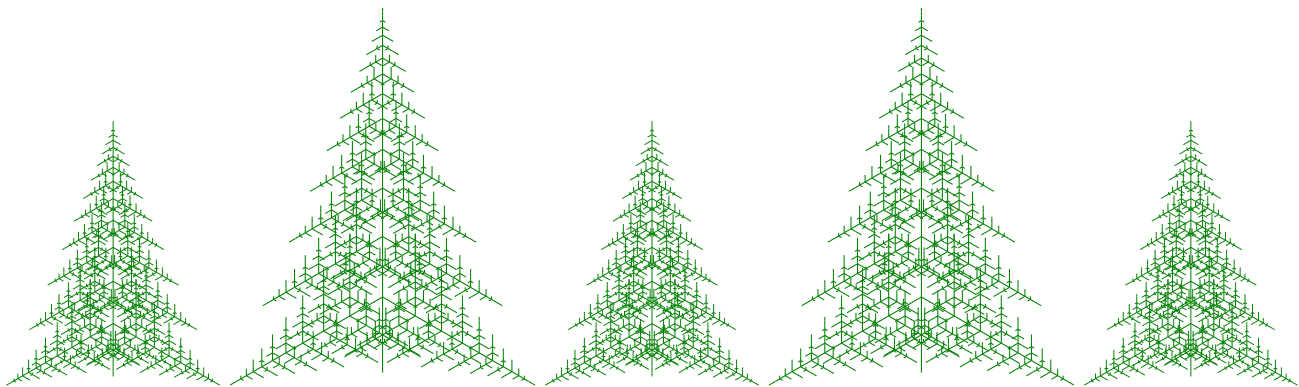
$$w_4 = aababbaa$$

$$w_5 = aaaabb$$

$$w_6 = bbabaa$$

(d) Geben Sie eine (mathematische oder umgangssprachliche) Beschreibung der Sprache $L(A)$ an, die vom Automaten A akzeptiert wird. Eine Begründung der Korrektheit Ihrer Antwort ist nicht notwendig.

(e) Ist A ein vollständiger DFA? Falls nicht, so geben Sie einen vollständigen DFA A_V mit möglichst wenigen Zuständen an, für den $L(A_V) = L(A)$ gilt. Eine Begründung der Korrektheit Ihrer Antwort ist nicht notwendig.



Frohe Weihnachten und ein tolles Jahr 2015!