Goethe-Universität Frankfurt am Main 9. Dezember 2014
Arbeitsgruppe Theoretische Informatik, Institut für Informatik
Dr. Dominik Freydenberger, Hannes Seiwert, Prof. Dr. Georg Schnitger

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 8

Abgabe: *bis 16. Dezember 2014, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 114 und 115 in der Robert-Mayer-Str. 11–15)*

Aufgabe 1: **(30 Punkte)**

Vor einigen Jahren engagierte der Weihnachtsmann eine namhafte Unternehmensberatung um den Prozess der jährlichen Geschenkverteilung zu optimieren. Eines der Ergebnisse war dabei eine Vereinfachung der Entscheidung welche Kinder tolle Geschenke bekommen und welche ein Stück Kohle. Früher musste der Weihnachtsmann lange Listen führen, in denen detailliert aufgeführt war, welche Kinder brav und welche ungezogen waren, und diese Listen dann anschließend noch auswerten. Die Berater überzeugten ihn, stattdessen ein deutlich vereinfachtes Verfahren zu verwenden, bei dem zufällig entschieden wird, ob ein Kind bei der Bescherung ein tolles Geschenk oder ein Stück Kohle erhält. Um offensichtliche Ungerechtigkeiten zu vermeiden hängt dabei die Entscheidung, ob ein Kind ein tolles Geschenk oder ein Stück Kohle bekommt allein davon ab, was es im Jahr zuvor bekommen hat.

Darum lässt sich die Folge der Ereignisse tolles Geschenk/ Kohle für ein Kind über die Jahre hinweg als Markov-Kette modellieren. Diese Markov-Kette hat als Zustandsmenge die Zustände z_1 für *Geschenk* und z_2 für *Kohle* sowie die Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} p_{z_1,z_1} & p_{z_1,z_2} \\ p_{z_2,z_1} & p_{z_2,z_2} \end{pmatrix}.$$

Dabei gibt der Wert p_{z_i,z_j} die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass nach dem Eintreten von Ereignis z_i an Weihnachten im darauf folgenden Jahr das Ereignis z_j eintritt.

Ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung $X^{(k)} = (X^{(k)}_{z_1}, X^{(k)}_{z_2})$ der Bescherung für ein Jahr $k \in \mathbb{N}$ bekannt, so kann die Wahrscheinlichkeitsverteilung im Jahr $k+1$ berechnet werden als $X^{(k+1)} = X^{(k)} \cdot P$.

(a) Das Public-Relations-Team des Weihnachtsmanns ist der Meinung, dass es seinem Ansehen schaden könnte, wenn dieses neue Verfahren an die Öffentlichkeit gerät. Damit das Verfahren nicht zu offensichtlich ist, benutzt der Weihnachtsmann daher für jedes Kind eine andere Übergangsmatrix. Wir betrachten die Übergangsmatrix für Bob, die ausdrückt, dass sich das Ereignis der Bescherung mit einer Wahrscheinlichkeit von 5/8 aus dem Vorjahr wiederholt. Für die Markov-Kette von Bobs Bescherung lautet die Übergangsmatrix also

$$P_B = \begin{pmatrix} 5/8 & 3/8 \\ 3/8 & 5/8 \end{pmatrix}.$$

Wir nehmen an, dass die Markov-Kette für Bobs Bescherung damit beginnt, dass Bob ein tolles Geschenk erhält, d. h. es gelte $X_B^{(0)} = (1, 0)$. Zur Erinnerung: Es gilt $X_B^{(k+1)} = X_B^{(k)} \cdot P_B$.

(i) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für Bobs Bescherung in Jahr drei, d. h. berechnen Sie $X_B^{(3)}$.

(ii) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass $X_B^{(k)} = \left(\frac{1}{2}(1+4^{-k}), \frac{1}{2}(1-4^{-k})\right)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt.

(iii) Zeigen Sie, dass die Markov-Kette mit Übergangsmatrix P_B ergodisch ist. Bestimmen Sie die Grenzverteilung $\lim_{k\to\infty} X_B^{(k)}$.

(b) Es gibt Kinder, deren jeweilige Übergangsmatrix für ihre Bescherung vorteilhafter ist als die von Bob (das gilt insbesondere für Kinder, die Mitglied im Weihnachtsmann-Premium-Club sind). Als Beispiel für ein solches Kind betrachten wir Alice, deren Übergangsmatrix gegeben ist durch

$$P_A = \begin{pmatrix} 7/8 & 1/8 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

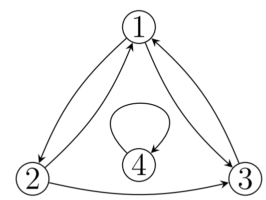
(i) Zeigen Sie, dass die Verteilung $X_A = (2/3,\ 1/3)$ eine stationäre Verteilung für die Bescherung von Alice ist, d. h. zeigen Sie, dass $X_A = X_A \cdot P_A$ ist.

(ii) Ist die Markov-Kette mit Übergangsmatrix P_A ergodisch? Bestimmen Sie die Grenzverteilung $\lim_{k\to\infty} X_A^{(k)}$ wenn $X_A^{(0)} = (1/4, 3/4)$. Zur Erinnerung: Es gilt $X_A^{(k+1)} = X_A^{(k)} \cdot P_A$.

(iii) Geben Sie eine stationäre Verteilung für die Bescherung von Bob in Teilaufgabe (a) an, d. h. geben Sie eine Verteilung X_B an mit $X_B \cdot P_B = X_B$.

Aufgabe 2: (25 Punkte)

Betrachten Sie den Web-Graph $G = (V, E)$, der aus den vier Webseiten 1, 2, 3 und 4 besteht, die wie in der nebenstehenden Abbildung miteinander verlinkt sind. Benutzen Sie für die folgenden Aufgaben den Dämpfungsfaktor $d := \frac{1}{2}$.



(a) Berechnen Sie ähnlich wie in Beispiel 5.2 aus dem Skript die Page-Ranks PR_1, PR_2, PR_3 und PR_4 der vier Webseiten von G bezüglich des Dämpfungsfaktors d.

(b) Stellen Sie für den angegebenen Web-Graph G und den Dämpfungsfaktor d die Page-Rank-Matrix $P_d(G)$ auf.

(c) Sei P die Page-Rank-Matrix $P_d(G)$ aus Teilaufgabe (b). Wir nehmen an, der Zufalls-Surfer startet auf einer der vier Webseiten von G, wobei er jede Webseite gleichwahrscheinlich als Startpunkt wählen kann. Das bedeutet, dass die Anfangsverteilung für den Zufalls-Surfer durch $X^{(0)} := (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ beschrieben wird. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Zufalls-Surfers auf den Knoten von G nach einem Schritt (d.h. $X^{(1)}$), nach zwei Schritten (d.h. $X^{(2)}$) und nach drei Schritten (d.h. $X^{(3)}$). Dabei ist $X^{(1)} := X^{(0)} \cdot P$, $X^{(2)} := X^{(1)} \cdot P$ und $X^{(3)} := X^{(2)} \cdot P$.

(d) Gesucht ist ein Web-Graph $G' = (V', E')$ mit vier Webseiten, in dem jede Webseite auf mindestens eine Webseite verlinkt, die nicht sie selber ist. Zusätzlich soll der Zufalls-Surfer mit der Anfangsverteilung $X^{(0)} := (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ nach einem Schritt in G' genau dieselbe Wahrscheinlichkeitsverteilung erreichen, es soll also $X^{(0)} \cdot P_d(G') = X^{(0)}$ gelten. Geben Sie einen solchen Graphen G' an und weisen Sie nach, dass $X^{(0)} \cdot P_d(G') = X^{(0)}$ gilt.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Wir betrachten die folgende Funktion `hoch`, die in der Programmiersprache C geschrieben wurde.

```
int hoch(int b, int x){
   if (x==0)
      return 1;
   else if ((x%2)==0) /* x gerade */
      return hoch(b*b, x/2);
   else
      return b * hoch(b, x-1);
}
```

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion über `x`: Für alle natürlichen Zahlen $\mathtt{b}, \mathtt{x} \in \mathbb{N}$ liefert der Aufruf `hoch(b,x)` als Rückgabewert $\mathtt{b}^{\mathtt{x}}$.

(b) Angenommen, `x` ist eine 2er-Potenz (d. h. es existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\mathtt{x} = 2^k$). Geben Sie die Höhe des Rekursionsbaums für den Aufruf $\mathtt{hoch}(\mathtt{b}, \mathtt{x})$ mit $\mathtt{b} \in \mathbb{N}$ an.

Aufgabe 4: **(20 Punkte)**

In dieser Aufgabe betrachten wir das Spiel *NimFünfOderHalb*, das wie folgt definiert ist: Zwei Spieler, Alice und Bob, spielen gegeneinander. Zu Beginn des Spiels liegen 24 Hölzer auf dem Tisch. Die beiden Spieler sind abwechselnd am Zug, Alice beginnt. In jedem Zug kann der Spieler, der gerade an der Reihe ist, entweder fünf Hölzer vom Tisch entfernen oder, falls eine gerade Anzahl an Hölzern auf dem Tisch liegt, den Haufen halbieren, also die Hälfte der Hölzer vom Stapel nehmen.

So kann Alice im ersten Zug fünf Hölzer vom Tisch nehmen (es verbleiben 19) oder den Stapel halbieren (es verbleiben 12). Hiernach ist Bob am Zug und kann bei 12 Hölzern wieder zwischen beiden Optionen wählen; bei 19 Hölzern ist er gezwungen, fünf davon wegzunehmen.

Es gewinnt der Spieler, der als letzter einen Zug ausführen konnte (also der Spieler, nach dessen Zug nur noch 0, 1 oder 3 Hölzer auf dem Tisch liegen).

Eine Gewinnstrategie für einen Spieler in diesem Spiel ist eine Vorschrift, die angibt, welcher Zug als nächstes getätigt werden soll um garantiert zu gewinnen.

(a) Modellieren Sie zur Beantwortung der folgenden Fragen das Spiel analog zum Beispiel 1.1 aus der Vorlesung durch ein Transitionssystem.

(b) Ist es eine gute Idee für Alice, im ersten Zug gleich den Stapel zu halbieren?

(c) Existiert in diesem Spiel eine Gewinnstrategie für Alice?

(d) Existiert eine Gewinnstrategie für Bob?