Goethe-Universität Frankfurt am Main
Arbeitsgruppe Theoretische Informatik, Institut für Informatik
Dr. Dominik Freydenberger, M. Sc. Frederik Harwath, Prof. Dr. Georg Schnitger

25. November 2014

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 6

Abgabe: *bis 2. Dezember 2014, 8.^{15} Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 114 und 115 in der Robert-Mayer-Str. 11–15)*

Definition. Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt *bipartit*, wenn seine Knotenmenge V so in zwei disjunkte Teilmengen V_1 und V_2 partitioniert werden kann (d. h. $V = V_1 \cup V_2$ und $V_1 \cap V_2 = \emptyset$), dass jede Kante aus E einen Endknoten in V_1 und einen Endknoten in V_2 hat.

Aufgabe 1: (25 Punkte)

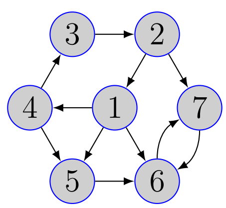
(a) Geben Sie die folgenden Graphen G_1 und G_2 in graphischer Darstellung an.
Hinweis: Beachten Sie dabei, ob es sich jeweils um einen gerichteten oder einen ungerichteten Graphen handelt.

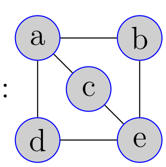
(i) $G_1 = \big(\{1,2,3,4,5,6\},\ \{(x,y) \,:\, x,y \in \{1,2,3,4,5,6\},\ x = y+2\}\big)$

(ii) $G_2 = \big(\{x \in \mathbb{N}_{>0} \,:\, 1 \le x \le 6\},\ \{\{x,y\} \,:\, x,y \in \mathbb{N}_{>0},\ 1 \le x < y \le 6,\ x+y > 6\}\big)$

Sind die Graphen G_1 und G_2 zusammenhängend bzw. stark zusammenhängend oder nicht? Enthält G_1 einen Kreis? Enthält G_2 einen Kreis? (Sie müssen Ihre Antworten nicht begründen.)

(b) Seien G_3 und G_4 die folgenden Graphen:

G_3:


G_4:


(i) Geben Sie jeweils die Knoten- und Kantenmenge von G_3 und G_4 an.

(ii) Geben Sie die starken Zusammenhangskomponenten von G_3 an.

(iii) Ist G_4 bipartit? Geben Sie ggf. die Partitionierung der Knotenmenge an.

Aufgabe 2: (20 Punkte)

Das Unternehmen *Modosoft* will seine Rechenzentren vernetzen. Das Netz muss dabei folgenden Anforderungen genügen:

(i) Von jedem Rechenzentrum muss es mindestens einen Leitungsweg zu jedem anderen Rechenzentrum geben.
(ii) Das Netz soll im folgenden Sinn redundant sein: Wenn höchstens eine Leitung ausfällt, soll es trotzdem weiterhin einen Leitungsweg zwischen je zwei Rechenzentren geben.
(iii) Jedes Rechenzentrum kann mit höchstens vier weiteren Rechenzentren über eine direkte Leitung verbunden werden.

Auf jeder Leitung können Daten in beide Richtungen gesendet werden. Ein solches Netzwerk lässt sich als ungerichteter Graph darstellen: Ein Knoten repräsentiert einen Rechner, und eine Kante repräsentiert eine Leitung.

(a) Übersetzen Sie alle obigen Anforderungen in Eigenschaften ungerichteter Graphen.

(b) Prüfen Sie, ob die Netzentwürfe, die durch die unten definierten Graphen repräsentiert werden, den Anforderungen genügen. Dies kann von der Anzahl n der Rechenzentren abhängen. Denken Sie daran, in jedem Fall anzugeben, welche Anforderungen erfüllt sind und welche nicht erfüllt sind.

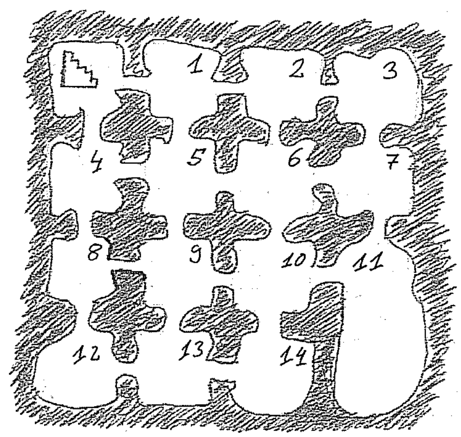
Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $V := \{1, \ldots, n\}$ und sei

- $G_1 := (V, E_1)$ und $E_1 := \{\{1, i\} : 2 \leq i \leq n\}$,
- $G_2 := (V, E_2)$ und $E_2 := \{\{i, i+1\} : 1 \leq i < n\}$,
- $G_3 := (V, E_3)$ und $E_3 := E_2 \cup \{\{n, 1\}\}$.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Beweisen Sie die folgende Aussage: In einem endlichen, bipartiten Graphen $G = (V, E)$ kann es keinen Kreis mit ungerader Länge geben.

Aufgabe 4: **(30 Punkte)**



Eines der wirtschaftlichen Zentren des verlorenen Zwergenkönigreichs war die *Mine von Môd-El'Irhûngh*, in der fleißige Zwergenbergarbeiter ohne Pause nach Gold gruben. Allerdings fanden die Zwerge dabei so viel Gold, dass dessen Marktwert komplett zusammenbrach. Die Zwergenbergarbeiter suchten sich daher neue Tätigkeitsfelder und ließen die Mine samt ihrer Goldschätze zurück.

Als sich der Goldpreis Jahrhunderte später wieder erholt hatte, war Môd-El'Irhûngh längst in Vergessenheit geraten. Durch einen glücklichen Zufall stieß kürzlich eine Gruppe von Schatzsuchenden, die *Gilde goldgieriger Gestalten*, auf ein uraltes Pergament. Dieses enthält nicht nur eine Beschreibung des Wegs zu Môd-El'Irhûngh, sondern auch eine Karte der Mine selbst (im Bild dargestellt). Wie dort leicht zu erkennen ist, besteht die Mine aus 15 Räumen. Die einzige Verbindung der Mine mit der Außenwelt ist eine Treppe, die sich in dem Raum links oben auf dem Plan befindet.

(a) Modellieren Sie die Mine Môd-El'Irhûngh als einen ungerichteten Graphen.

Die Schatzsuchenden möchten nun diese Mine erforschen und bei dieser Gelegenheit so viel Gold wie möglich mitnehmen. Deswegen wollen sie jedem Raum mindestens einmal betreten. Aus Erfahrung wissen die Schatzsuchenden aber, dass in verlassenen Minen stets unerschöpfliche Horden von unfreundlichen Kreaturen lauern (wie zum Beispiel Keulenkobolde oder Grubengnome). Sie möchten daher jeden Raum nur ein einziges Mal betreten – die einzige Ausnahme von dieser Regel ist der Raum mit Treppe, dieser soll zweimal betreten werden (einmal am Anfang und einmal am Ende der Route).

(b) Existiert eine solche Route? Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Anwort.

(c) Im Rahmen ihrer Vorbereitungen erfahren die Schatzsuchenden, dass in Raum 6 (siehe Karte) ein gehörnter, feuerspuckender Riesenhamster schläft. Um diesem Monster zu entgehen beschließen sie daher, bei ihrer Route diesen Raum auszulassen. Existiert eine solche Route? Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Anwort.

Sie können zur Lösung dieser Aufgaben die Aussage aus Aufgabe 3 benutzen, auch wenn Sie diese nicht bewiesen haben.