Goethe-Universität Frankfurt am Main 18. November 2014
Arbeitsgruppe Theoretische Informatik, Institut für Informatik
Dr. Dominik Freydenberger, M. Sc. Frederik Harwath, Prof. Dr. Georg Schnitger

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 5

Abgabe: *bis 25. November 2014, $8.^{15}$ Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 114 und 115 in der Robert-Mayer-Str. 11–15)*

Aufgabe 1: **(30 Punkte)**

Die rüstige Seniorin Greta Gutgläubig lebt im Nordosten von Bockenheim in ihrem kleinen Häuschen mit Garten. Eines Tages erhält sie Besuch von einem Finanzberater ihrer Bank, der *vvVvF* (kurz für *vollkommen vertrauenswürdige Verwalter von Finanzen*). Beim Kaffeetrinken stellt ihr der Berater, ein gewisser Herr Zinsenzock, ein kreatives neues Finanzprodukt vor:

„Liebe Frau Gutgläubig, es ist Zeit, Ihr passives Kapital und uns für Sie arbeiten zu lassen. Im Rahmen unserer neuen Anlageform *Buchhaltungs-Trick: Radikale Umsätze garantiert*, kurz B. T. R. U. G., können wir Ihnen eine Turbozins-Hypothek anbieten. Im ersten Monat bekommen Sie von uns 1000 Euro ausgezahlt, in jedem späteren Monat n bekommen Sie so viel wie im Vormonat und dazu n mal 256 Euro als Treueprämie. Sie bekommen also zuerst 1000, dann 1512, dann 2280 Euro, und im zwölften Monat schon eine Auszahlung von sagenhaften 20712 Euro!“

„So viel Geld? Ach, junger Mann,“ ruft Greta Gutgläubig, „das klingt ja fast zu gut um wahr zu sein. Was ich damit alles anfangen könnte! Das würde ich Ihnen sofort unterschreiben.“

„Sehr gut, Frau Gutgläubig! Eine Sache ist da in der Tat noch zu erwähnen. Es fallen auch ein paar geringfügige Gebühren an: Im ersten Monat 1 Euro, und in jedem späteren Monat die Gebühr des Vormonats und nochmal der gleiche Betrag. Der Gesetzgeber verlangt albernerweise, dass ich noch auf eine Kleinigkeit hinweise: Sollten die Gebühren jemals die Erträge übersteigen, müssten Sie uns die Differenz zahlen, oder wir müssten Ihr kleines Häuschen pfänden. Aber die Erträge sind ja viel höher und steigen immer weiter, da kann das gar nicht passieren.“

Greta Gutgläubig denkt kurz nach und lächelt dann. „Da haben Sie recht. Da unterschreibe ich doch gerne, schon meinen Enkelkindern zuliebe. Aber eine Bitte hätte ich da noch: Damit ich mich sicherer fühle, würde ich gerne monatlich kündigen können. Nicht, dass ich das je tun würde, aber mich beruhigt sowas.“

Herr Zinsenzock ist so stolz auf sein Verkaufstalent, dass er Greta Gutgläubig diesen Wunsch sofort erfüllt und den Vertrag anpasst.

(a) Formulieren Sie die monatliche Entwicklung der Auszahlungen und der Gebühren als zwei rekursiv definierte Funktionen $f, g\colon \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{N}_{>0}$, so dass $f(n)$ die Auszahlung im Monat n und $g(n)$ die Gebühren im Monat n angibt. Geben Sie dabei jeweils den Rekursionsanfang und den Rekursionsschritt explizit an (wie in Abschnitt 2.6.1 im Skript).

(b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion: $f(n) = 744 + 128(n^2 + n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $g(n) = 2^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

(c) Finden Sie ein $n_0 \in \mathbb{N}_{>0}$, so dass entweder $f(n) \geq g(n)$ oder $f(n) \leq g(n)$ für alle $n \geq n_0$. Beweisen Sie per Induktion, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(d) Welcher der beiden Beteiligten hat hier das bessere Geschäft gemacht?

Aufgabe 2: **(30 Punkte)**

Die *n-stellige Paritätsfunktion* $\oplus_n \colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ sei im Folgenden wie in der Vorlesung (bzw. den Folien zur Vorlesung) rekursiv definiert.

(a) Zeigen Sie, dass $\oplus_n(x) = 1$ genau dann für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und alle $x \in \{0,1\}^n$ gilt, wenn die Anzahl der Einsen in x ungerade ist. Es bietet sich an, hierzu ein vollständige Induktion zu verwenden.

Für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ definieren wir eine aussagenlogische Formel φ_n für $\oplus_n$ mit $\mathrm{Var}(\varphi_n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &:= x_1, \\ \varphi_{n+1} &:= (\varphi_n \oplus x_{n+1}). \end{aligned}$$

(b) Ist $(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$ ein Implikant für die Formel φ_4?

(c) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt: Jeder Konjunktionsterm einer DNF für φ_n ist ein Minterm.

Hinweis: Verallgemeinern Sie das Vorgehen aus Ihrer Antwort zu Teil (b).

(d) Zeigen Sie, dass eine DNF für die Formel φ_n für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mindestens 2^{n-1} Konjunktionsterme enthalten muss.

Aufgabe 3: **(20 Punkte)**

Seien X, Y und Z Mengen. Zeigen Sie, dass Folgendes gilt: Ist $(X \setminus Y) \subseteq Z$, so ist $(X \setminus Z) \subseteq Y$.

Aufgabe 4: **(20 Punkte)**

Zeigen Sie: Die Menge $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ ist nicht abzählbar, d.h. es gibt keine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$.

Hinweis: Eine Möglichkeit ist, das Diagonalargument aus dem Beweis für die Nichtabzählbarkeit von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (Satz 2.46 im Skript) anzupassen.