

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 4

Abgabe: bis 18.11.2014, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 114 und 115 in der Robert-Mayer-Str. 11–15)

Aufgabe 1:

(33 Punkte)

Die Besatzung des Forschungsraumschiffs *Omortson* landet auf dem Planetoiden *Dismond 214*. Dort entdecken die Forscher eine außerirdische Lebensform, die sie wegen ihrer Ähnlichkeit mit den von der Erde bekannten Hamstern als *Weltraumhamster* bezeichnen.

Diese Weltraumhamster kommen in verschiedenen Unterarten vor, die unterschiedliche Eigenschaften besitzen: Einige der Hamster haben ein besonders flauschiges Fell, einige haben große Augen und manche haben Tentakel. Durch einen unglücklichen Zwischenfall entdecken die Forscher eine weitere Eigenschaft: Manche der Weltraumhamster sind überaus bissig. Nach längerer Beobachtung und unter großen Gefahren für Leib und Leben tragen die Forscher die folgenden Informationen zusammen, die für alle Weltraumhamster gelten:

1. Der Weltraumhamster hat höchstens zwei der drei Eigenschaften flauschiges Fell, große Augen und Tentakel.
2. Ist der Weltraumhamster bissig, so hat er mindestens zwei der drei Eigenschaften flauschiges Fell, große Augen und Tentakel.
3. Ein Weltraumhamster, der keine großen Augen hat, hat keine Tentakel oder ist nicht bissig.
4. Ist der Hamster bissig und hat große Augen, so hat er auch ein flauschiges Fell.

(a) Formalisieren Sie jede der Aussagen 1.–4. durch eine aussagenlogische Formel und geben Sie eine aussagenlogische Formel φ an, die das gesamte Wissen über Weltraumhamster zusammenfasst (also eine „Wissensrepräsentation“). Mit anderen Worten: φ soll widerspiegeln, dass *jede* der Aussagen 1.–4. erfüllt ist. Verwenden Sie dazu die Variablen A , B , F und T um die atomaren Aussagen „der Weltraumhamster hat große **A**ugen“, „der Weltraumhamster ist **B**issig“, „der Weltraumhamster hat ein flauschiges **F**ell“ bzw. „der Weltraumhamster hat **T**entakel“ auszudrücken.

Betrachten Sie nun die folgenden Aussagen:

5. Hat der Weltraumhamster Tentakel, so ist er nicht bissig.
6. Wenn der Weltraumhamster bissig ist und Tentakel hat, so hat er ein flauschiges Fell und große Augen.
7. Der Weltraumhamster hat große Augen, ein flauschiges Fell und keine Tentakel; oder er ist nicht bissig und hat höchstens zwei der drei Eigenschaften große Augen, flauschiges Fell und Tentakel.

(b) Geben Sie für jede der Aussagen 5.–7. eine aussagenlogische Formel an, die die Aussage repräsentiert.

(c) Entscheiden Sie für jede der aussagenlogischen Formeln aus (b), ob sie aus der Formel φ in (a) folgt und ob sie semantisch äquivalent dazu ist.

Aufgabe 2:**(20 Punkte)**

Die aussagenlogische Formel φ_1 und φ_2 seien definiert als

$$\varphi_1 := \left(\left((A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow D) \right) \rightarrow C \right) \wedge C \wedge D \wedge E \wedge F$$

$$\varphi_2 := \left(\left((A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow D) \right) \rightarrow C \right) \wedge \neg C \wedge D \wedge E \wedge F$$

Beweisen oder widerlegen Sie jeweils ohne Verwendung von Wahrheitstafeln:

- (a) φ_1 ist erfüllbar. (b) φ_2 ist erfüllbar.

Aufgabe 3:**(27 Punkte)**

(a) Geben Sie für jede der folgenden Formeln an, ob sie in DNF und/oder KNF ist.

- | | |
|---|--|
| (i) $(V_0 \wedge \neg V_1) \vee (\neg V_1 \wedge \neg V_0)$ | (iv) $(V_3 \wedge V_5)$ |
| (ii) $((\mathbf{0} \vee \neg V_2) \rightarrow V_2)$ | (v) $\neg V_2 \wedge ((V_1 \wedge \neg V_0) \vee V_3)$ |
| (iii) $\neg V_2 \wedge (V_5 \vee \neg V_1)$ | (vi) $(\neg(\neg V_3 \vee \neg V_3) \wedge \neg V_3)$ |

(b) Betrachten Sie die boolesche Funktion $f : \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$ mit der Eigenschaft, dass $f(x) = 1$ genau dann für ein Wort $x \in \{0, 1\}^3$ gilt, wenn x mindestens zwei 1en enthält.

- (i) Bestimmen Sie eine aussagenlogische Formel φ für f .
(ii) Bestimmen Sie alle Minterme und alle Maxterme von φ .
(iii) Bestimmen Sie eine kanonische DNF und eine kanonische KNF von φ .
(iv) Bestimmen Sie alle Implikanten von φ und geben Sie an, welche dieser Implikanten Primimplikanten sind.

Aufgabe 4:**(20 Punkte)**

Der Imbiss Modways bietet Suppen, Panini und Getränke an. Der Imbissbesitzer Felix Focaccia würde in Zukunft gerne Mittagsmenüs anbieten. Ein Menü kann hierbei jeweils eine Suppe, ein Panino, einen Kaffee oder Mineralwasser beinhalten. Als vielbeschäftigter Mann will Felix sich die Menüs lieber nicht selbst ausdenken. Er beauftragt seine Aushilfe Clemens Cantuccini, eine Liste mit Mittagsmenüs zu erstellen.

Felix hat folgende Anforderungen an ein *gutes Menü*:

1. Menüs ohne Suppe müssen ein Panino enthalten.
2. Menüs ohne Suppe müssen einen Kaffee oder ein Mineralwasser enthalten.
3. Menüs mit Panino, Kaffee und Mineralwasser dürfen keine Suppe enthalten.
4. Menüs ohne Kaffee und Mineralwasser müssen ein Panino enthalten.

Clemens entscheidet sich dazu, seine Aufgabe mit den Mitteln der Aussagenlogik zu lösen.

- (a) Konstruieren Sie für Clemens eine aussagenlogische Formel φ , die Felix Anforderungen beschreibt. Verwenden Sie Variablen K , M , P , S die jeweils für die Aussage stehen, dass ein Menü einen **K**affee, ein **M**ineralwasser, ein **P**anino bzw. eine **S**uppe enthält.
(b) Geben Sie eine Formel ψ in DNF an, die zu Ihrer Formel φ äquivalent ist.
(c) Beschreiben Sie, wie Clemens anhand der Formel ψ alle möglichen guten Menüs ermitteln kann.