

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 3

Abgabe: bis 11. November 2014, 8.¹⁵ Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 114 und 115 in der Robert-Mayer-Str. 11–15)

Aufgabe 1:

(30 Punkte)

Die Besatzung des Piratenschiffs *Tollwütige Seegurke* langweilt sich: Viel zu lange schon liegt ihr Schiff tatenlos vor Anker. Alle sind sich einig, dass sie endlich wieder etwas unternehmen müssen; weniger einig sind sie sich bei der Frage, was genau getan werden sollte. Daraus entwickelt sich eine erhitzte Diskussion. Nach und nach tragen die Piraten die folgenden Anforderungen zusammen:

1. Die Piratenkapitänin Enterhaken-Hannah besteht darauf, dass echte Piraten auf jeden Fall plündern oder Rum trinken müssen.
 2. Ihr Stellvertreter Schwarzbert erinnert an eine alte Piratentradition: „Wenn wir plündern, dann müssen wir sowohl Rum trinken als auch auf Schatzsuche gehen.“
 3. Der Koch Sieben-Finger-Jack meint: „Wer auf Schatzsuche geht, der muss auch nach Quallen fischen. Bei Schatzinseln findet man immer die besten Quallen.“
 4. Der alte Pirat Festland-Fred mahnt zur Vorsicht: „Rum und Quallen sind toll, aber eine gefährliche Kombination! Wir sollten entweder nach Quallen fischen oder Rum trinken.“
- (a) Übersetzen Sie die Anforderungen 1. bis 4. in aussagenlogische Formeln, die die jeweilige Forderung widerspiegeln. Benutzen Sie dazu die aussagenlogischen Variablen P , Q , R und S mit der Bedeutung, dass die Piraten **P**lündern, nach **Q**uallen fischen, **R**um trinken oder auf **S**chatzsuche gehen.
- (b) Stellen Sie eine aussagenlogische Formel φ auf, die die aussagenlogischen Variablen P , Q , R und S benutzt und die widerspiegelt, dass die Anforderungen 1. bis 4. gleichzeitig erfüllt sein müssen.
- (c) Stellen Sie eine Wahrheitstafel für die Formel φ auf.
- (d) Geben Sie für Ihre Formel φ aus (b) eine Belegung an, die besagt, dass die Piraten plündern, nach Quallen fischen, nicht Rum trinken und nicht auf eine Schatzsuche gehen. Erfüllt diese Belegung die Formel φ ?
- (e) Welche Auswahlen aus den Aktivitäten Plündern, Quallenfischen, Rumtrinken und Schatzsuche stellen alle Piraten zufrieden?

Aufgabe 2:**(22 Punkte)****(a)** Betrachten Sie die folgenden Worte:

$$(V_1 = \mathbf{1})$$

$$((V_1 \vee V_2) \wedge V_3)$$

$$(V_1 \rightarrow \neg\neg V_1)$$

$$\neg 0 \rightarrow 1 \wedge V_3$$

$$\mathbf{10}$$

$$(V_1 \wedge (V_1 \leftarrow V_2))$$

Bestimmen Sie die Menge M der Worte aus der obigen Liste, die korrekten aussagenlogischen Formeln entsprechen. Eine Begründung ist nicht notwendig.

(b) Weisen Sie anhand der rekursiven Definition der Menge AL nach, dass $M \subseteq \text{AL}$.**(c)** Geben Sie für jede Formel $\varphi \in M$ die Menge $\text{Var}(\varphi)$ an.**(d)** Wir sagen, dass eine Formel φ *erfüllbar* ist, wenn es eine Belegung \mathcal{B} mit $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{B}} = 1$ gibt (siehe auch Seite 83 im Skript). Prüfen Sie für jede der Formeln $\varphi \in M$, ob φ erfüllbar ist. Falls ja, geben Sie eine erfüllende Belegung an. Andernfalls zeigen Sie, dass es keine erfüllende Belegung gibt.**(e)** Wir sagen, dass eine Formel φ *allgemeingültig* ist, wenn $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{B}} = 1$ für alle passenden Belegungen \mathcal{B} gilt (siehe auch Seite 84 im Skript). Prüfen Sie für jede der Formeln $\varphi \in M$, ob φ allgemeingültig ist.

Falls ja, beweisen Sie, dass jede zu φ passende Belegung φ erfüllt. Andernfalls geben Sie eine Belegung an, die φ nicht erfüllt

Aufgabe 3:**(23 Punkte)**

Wir sagen, dass zwei aussagenlogische Formeln φ und ψ *äquivalent* sind und schreiben $\varphi \equiv \psi$, wenn $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{B}} = \llbracket \psi \rrbracket^{\mathcal{B}}$ für alle zu φ und ψ passenden Belegungen \mathcal{B} gilt (siehe auch Seite 84 im Skript). Beachten Sie, dass dies gleichbedeutend dazu ist, dass die Formel $\varphi \leftrightarrow \psi$ allgemeingültig ist. Beweisen Sie z.B. mit Hilfe von Wahrheitstafeln, dass die folgenden Äquivalenzen für alle aussagenlogischen Formeln φ, ψ, χ gelten:

(a) $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi.$

(c) $(\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi \equiv (\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi).$

(b) $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi.$

Aufgabe 4:**(25 Punkte)**

Die Firma *Dismoms freundliche Roboterfabrik* hat das Robotermodell *AussagoBot 3000* auf den Markt gebracht. Dieses Modell gibt es in zwei Varianten: Dem *WahrBot*, der stets die Wahrheit sagt, und dem *LügBot*, der niemals die Wahrheit sagt. Rein äußerlich sind die beiden Varianten nicht zu unterscheiden. Sie begegnen nun drei Robotern vom Modell *AussagoBot 3000* mit den Namen A-Bot, B-Bot und C-Bot. Diese machen die folgenden Aussagen:

A-Bot: „Mindestens einer von uns dreien ist ein LügBot.“**B-Bot:** „A-Bot und C-Bot sind beide kein WahrBot.“**C-Bot:** „Ich bin ein WahrBot.“**(a)** Geben Sie für jede der drei Aussagen eine aussagenlogische Formel φ_A , φ_B bzw. φ_C an, die den jeweiligen Aussagen entsprechen. Verwenden Sie dazu die Variablen A , B und C mit der Bedeutung, dass A-Bot, B-Bot bzw. C-Bot ein WahrBot ist.**(b)** Welcher der drei Roboter ist ein WahrBot, welcher ein LügBot? Falls es mehrere Möglichkeiten gibt, so geben Sie alle an. Begründen Sie, warum es keine weiteren Lösungen als die von Ihnen angegebenen geben kann. Geben Sie dazu eine entsprechende aussagenlogische Formel φ an und ermitteln Sie anhand einer Wahrheitstafel, welche Belegungen φ erfüllen.
Hinweis: Beachten Sie, dass die Wahrheit der Aussagen, die von φ_A , φ_B bzw. φ_C repräsentiert werden, jeweils davon abhängt, ob A-Bot, B-Bot bzw. C-Bot ein WahrBot oder ein LügBot ist.