Goethe-Universität Frankfurt am Main 28. Oktober 2014
Arbeitsgruppe Theoretische Informatik, Institut für Informatik
Dr. Dominik Freydenberger, M. Sc. Frederik Harwath, Prof. Dr. Georg Schnitger

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 2

Abgabe: *bis 4. November 2014, 8.^{15} Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 114 und 115 in der Robert-Mayer-Str. 11–15)*

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Das Online-Rollenspiel *Machete: Zombillierung (MaZom)* spielt in einer düsteren Zukunft: Nach Ausbruch einer Zombie-Seuche sind die letzten Überlebenden darauf angewiesen, sich von Dosenkaffee und Schokoriegeln zu ernähren, die sie aus verlassenen Geschäften plündern. In dieser Aufgabe modellieren wir einige Aspekte dieses Spiels mit Mengen (bzw. Wertebereichen). Dabei kann nur die Menge $\mathbb{N}$ als vordefiniert vorausgesetzt werden.

(a) In der Spielwelt vom MaZom können Geschäfte durchsucht werden, nämlich 5 unterschiedliche Einkausfzentren und 37 unterschiedliche Tankstellen. Definieren Sie die Mengen EZ (für Einkaufszentren) und TS (für Tankstellen), deren Elemente die einzelnen Einkaufszentren bzw. Tankstellen *repräsentieren*.

Hinweis: Konstruieren Sie die Mengen so, dass Sie damit die folgenden Teilaufgaben lösen können.

(b) Im Lauf des Spiels trifft die Spielfigur immer wieder auf Gegner. Diese bestehen gewöhnlich aus einer Horde von langsamen und von schnellen Zombies (von beiden Zombiearten können jeweils unbeschränkt, aber endlich viele in einer Horde vorkommen).

- **(i)** Definieren Sie die Menge ZH (für Zombiehorde), deren Elemente mögliche Zusammensetzungen von Zombiehorden repräsentieren, also die Anzahl der langsamen und die Anzahl der schnellen Zombies in der Horde.
- **(ii)** Welches Element von ZH steht für die Zusammensetzung einer Horde, die aus 17 langsamen und 3 schnellen Zombies besteht?

(c) Der Zustand einer Spielfigur ist zu jedem Zeitpunkt bestimmt durch die Zahl der Kaffeedosen die sie mit sich führt, die Zahl der Schokoriegel die sie bei sich hat, sowie durch die Menge der bisher durchsuchten Einkaufszentren und Tankstellen.

- **(i)** Definieren Sie eine Menge SFZ (für Spielfigurzustände), von der jedes Element einen möglichen Zustand einer Spielfigur definiert.
- **(ii)** Welches Element von SFZ beschreibt, dass die Spielfigur 12 Kaffeedosen und 2 Schokoriegel bei sich hat und bereits in den Einkaufszentren 2 und 4 sowie in den Tankstellen 1, 4 und 16 war?

(d) Durchsucht die Spielfigur von MaZom ein Einkaufszentrum oder eine Tankstelle, so erhält sie als Belohnung eine bestimmte Anzahl Kaffeedosen und Schokoriegeln. Diese Anzahl hängt davon ab, welches Einkaufszentrum oder welche Tankstelle durchsucht wurde, und wie vielen Zombies sie dabei begegnet ist. Geben Sie Mengen A und B an, so dass dieser Zusammenhang durch eine Funktion *Beute:* $A \to B$ modelliert werden kann; das heißt *Beute* soll die Anzahl der erhaltenen Kaffeedosen und die Anzahl der erhaltenen Schokoriegel in Abhängigkeit von dem Einkaufszentrum bzw. der Tankstelle sowie der Zusammensetzung der angetroffenen Zombies angeben.

Aufgabe 2: **(20 Punkte)**

Sei $M := \{2, 4, 9, 16, 23\}$, $N := \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist gerade}\}$ und $K := \{2x + 3 : x \in \mathbb{N}\}$. Sei $U := \mathbb{N}$ ein Universum. Gelten die folgenden Aussagen? (Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.)

(a) $\{4\} \subseteq \mathcal{P}(N)$

(b) $\emptyset \in (\mathcal{P}(M) \cap M^2)$

(c) $(4, 7) \in M \times (\overline{N} \cap K)$

(d) $\{3\} \subseteq \overline{\overline{(M \cup N)} \cap \overline{\overline{N} \cap \overline{M}}}$

Aufgabe 3: **(20 Punkte)**

Das Reiseunternehmen *ModTours* transportiert Reisende mit Hilbert Omnibussen. Ein Hilbert Omnibus hat unendlich viele Sitzplätze, die fortlaufend mit allen Zahlen aus $\mathbb{N}_{>0}$ nummeriert sind. ModTours hat unendlich viele dieser Omnibusse, die ebenfalls fortlaufend mit allen Zahlen aus $\mathbb{N}_{>0}$ nummeriert sind.

(a) Aus betrieblichen Gründen muss ModTours die Reisenden aus den drei Hilbert Omnibussen Bus 1, Bus 2 und Bus 3 in einen neuen, anfänglich leeren, Hilbert Omnibus zusammenlegen. Geben Sie dazu eine Funktion f an, die einem Reisenden in Bus i auf Platz j den Sitzplatz $f(i, j)$ in dem neuen Bus zuweist. Natürlich darf kein Platz mehr als einem Reisenden zugewiesen werden. Welche Eigenschaft muss f haben, damit sich keine zwei Reisenden einen Platz teilen müssen?

(b) Aus schwerwiegenden betrieblichen Gründen muss ModTours die Reisenden aus allen Hilbert Omnibussen in einen neuen Hilbert Omnibus zusammenlegen. Auch hier darf kein Platz doppelt vergeben werden. Geben Sie dazu eine Funktion f an, die einem Reisenden in Bus i auf Platz j den Sitzplatz $f(i, j)$ in dem neuen Bus zuweist.

Hinweis: Die Sitzplätze im neuen Bus müssen nicht lückenlos vergeben werden.

Aufgabe 4: **(35 Punkte)**

Bei dieser Aufgabe sind Begründungen nicht notwendig.

(a) Wir betrachten die folgenden Relationen:

(i) $R := \{(1, b), (2, a), (3, c), (4, a)\}$ auf $A := \{1, 2, 3, 4\}$ und $B := \{a, b, c\}$

(ii) $R := \{(a, 4), (b, 2), (c, 1), (c, 3)\}$ auf $A := \{a, b, c\}$ und $B := \{1, 2, 3, 4\}$

(iii) $R := \{(1, b), (2, a), (3, d)\}$ auf $A := \{1, 2, 3\}$ und $B := \{a, b, c, d\}$

Geben Sie für jede Relation an, ob sie eine Funktion von A nach B ist. Geben Sie außerdem für jede Funktion an, ob sie injektiv, surjektiv und/oder bijektiv ist.

(b) Geben Sie für jede der folgenden Funktionen f an, ob die Funktion injektiv, surjektiv und/oder bijektiv ist. Geben Sie jeweils auch das Bild von f an.

(i) $f \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Z}$ mit $f(x, y) := x - y$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$

(ii) $f \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $f(x, y) := 2^x 3^y$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$

(iii) $f \colon A^* \to \mathbb{N}$ für eine beliebige Menge A mit $|A| = 1$ und $f(w) := |w|$ für alle $w \in A^*$

(iv) $f \colon A^* \to \mathbb{N}$ für eine beliebige Menge A mit $|A| = 2$ und $f(w) := |w|$ für alle $w \in A^*$