Goethe-Universität Frankfurt am Main
Arbeitsgruppe Theoretische Informatik, Institut für Informatik
Dr. Dominik Freydenberger, M. Sc. Frederik Harwath, Prof. Dr. Georg Schnitger

21. Oktober 2014

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 1

Abgabe: *bis 28. Oktober 2014, 8.^{15} Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 114 und 115 in der Robert-Mayer-Str. 11–15)*

*Bitte achten Sie darauf, dass Sie auf der Abgabe Ihrer Lösung Ihren **Namen**, Ihre **Matrikelnummer** und Ihre **Übungsgruppe** angeben. Mehrseitige Abgaben **müssen** zusammengeheftet werden. Eine verspätete Abgabe ist **nicht** möglich!*

*Für dieses Übungsblatt und **alle** folgenden gilt: Eine Aufgabe gilt nur dann als vollständig bearbeitet, wenn neben der Lösung auch die notwendigen Begründungen angegeben sind – es sei denn, in der Aufgabenstellung steht, dass eine solche Begründung nicht erforderlich ist.*

Viel Spaß!

Aufgabe 1: **(35 Punkte)**

Der Chemielehrer Walter Weiß verdient sich seit einiger Zeit heimlich ein wenig Geld dazu, indem er hochprozentigen synthetischen Ebbelwoi herstellt und auf dem Schwarzmarkt verkauft. Damit er dabei nicht entdeckt wird, hat ihm sein Handlanger Jockel ein Labor in einem alten Wohnmobil eingerichtet, das die beiden in den Wäldern des Taunus verstecken.

In einem Schritt des Rezepts für den synthetischen Ebbelwoi müssen Walter und Jockel Apfelsäure in drei Portionen von 1 Liter, 2 Liter und 4 Liter aufteilen. Da das Labor im Wohnmobil sehr schlecht ausgestattet ist, sind dort allerdings kaum Behälter vorhanden. Die beiden können ausschließlich drei Kanister verwenden, und zwar in den Größen 2 Liter, 4 Liter und 7 Liter. Der 7-Liter Kanister ist bereits komplett mit Apfelsäure gefüllt, der 2 Liter- und der 4 Liter-Kanister sind leer.

Ziel ist es, je genau einen der Kanister mit 1 Litern, 2 Litern beziehungsweise 4 Litern Apfelsäure zu füllen. Da sich an den Kanistern keine Markierungen befinden (und sonst keine Behälter vorhanden sind), können die beiden ihr Ziel nur erreichen, indem sie schrittweise einen der Kanister in den anderen kippen bis einer der beiden Kanister komplett voll oder leer ist.

Modellieren Sie zur Beantwortung der folgenden Fragen das Problem durch ein Transitionssystem analog zum „Murmelbeispiel“ aus der Vorlesung. Geben Sie dabei nur Zustände an, die vom Startzustand aus erreichbar sind.

(a) Können Walter und Jockel ihr Ziel erreichen?

(b) Jockel verliert die Geduld und beginnt zufällig und ohne Überlegen die Kanister umzufüllen. Dabei achtet er nur darauf, dass er keine Aktion direkt im nächsten Schritt wieder rückgängig macht. Ansonsten geht er (unter Berücksichtigung der Regeln) vollkommen wahllos vor. Wird er dann zwangsläufig irgendwann in den Zustand kommen, in dem er sein Ziel erreicht hat?

(c) Für andere Rezepte sind andere Portionsgrößen notwendig. Geben Sie alle Kombinationen von Portionen an, die bei dieser Vorgehensweise abgemessen werden können.

Aufgabe 2: **(20 Punkte)**

Sei $M := \{4, 8, 15, 23, 42\}$, $G := \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist gerade}\}$ und $U := \{2x + 1 : x \in \mathbb{N}\}$. Schreiben Sie jede der folgenden Mengen in extensionaler Form auf und geben Sie ihre Kardinalität an. (Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.)

(a) $(G \cap U) \times M$

(b) $(G \times U) \cap M^2$

(c) $\{(x, y, z) \in M^3 : x + y = z\}$

(d) $(M \cap U) \times \{☺, ☹\}$

Aufgabe 3: **(20 Punkte)**

Gelten die folgenden Gleichungen für alle Mengen X, Y und Z? Wenn Sie von der Korrektheit einer der Gleichungen überzeugt sind, so beweisen Sie diese. Geben Sie anderenfalls Mengen an, für welche die jeweilige Gleichung nicht gilt.

(a) $X^2 \cup Y^2 = (X \cup Y)^2$

(b) $(X \cap Y)^2 \subseteq X^2 \cap Y^2$

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Herr Dismonk bereitet sich seit Wochen auf einen drohenden Ausnahmezustand vor: Wie jedes Jahr werden die Kinder aus der Nachbarschaft sich zu Halloween auf die Jagd nach Süßigkeiten begeben. Damit sein Haus in diesem Jahr nicht wieder mit Eiern beworfen wird, hat er sich diesmal vorbereitet und einen großen Vorrat an unterschiedlichen Bonbons gekauft. Um sich die Zeit bis zum Eintreffen der erpresserischen Horden zu vertreiben, erstellt Herr Dismonk eine Statistik über seinen Vorrat. Dabei fällt ihm auf, dass jedes der Bonbons mindestens eine der drei folgenden Eigenschaften erfüllt: Einige sind knallorange gefärbt, einige wurden aus Rübensirup statt aus Zucker hergestellt und einige sind (als besondere Überraschung) innen sauer.

Sei O die Menge der Bonbons, die orange gefärbt sind und R die Menge derer, die aus Rübensirup hergestellt wurden. Schließlich sei S die Menge der Bonbons, die innen sauer sind. Durch geduldiges Nachzählen hat Herr Dismonk die folgenden Informationen zusammengetragen:

$$\begin{aligned} |S| &= 87, & |S \cap O| &= 40, & |S \cap O \cap R| &= 17, \\ |O| &= 274, & |S \cap R| &= 22, & & \\ |R| &= 553, & |O \cap R| &= 128. & & \end{aligned}$$

(a) Wie viele Bonbons hat Herr Dismonk insgesamt gekauft?
D. h. berechnen Sie $|O \cup R \cup S|$.

(b) Durch eine repräsentative Umfrage unter den Nachbarschaftskindern hat Herr Dismonk herausgefunden, dass diese besonders gerne Bonbons mögen, die innen sauer sind, oder die orange gefärbt sind und nicht aus Rübensirup hergestellt wurden. Wie viele dieser Bonbons hat Herr Dismonk gekauft?
D.h. berechnen Sie $|S \cup (O \setminus R)|$.

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst anhand von Venn-Diagrammen, wie man die Kardinalitäten der Mengen berechnen kann.