Beweise: Warum?

- Eine **formale Aussage**, wie z.B. ein mathematischer Satz, besteht aus Voraussetzungen und einer Behauptung.
- Wie stellt man sicher, dass die Behauptung immer dann wahr ist, wenn alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Beweise: Warum?

- Eine **formale Aussage**, wie z.B. ein mathematischer Satz, besteht aus Voraussetzungen und einer Behauptung.
- Wie stellt man sicher, dass die Behauptung immer dann wahr ist, wenn alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Ein **Beweis** muss die Behauptung

mit Hilfe logischer Schlussregeln aus Definitionen, Voraussetzungen, Axiomen und bereits als wahr nachgewiesenen Aussagen herleiten.

Beweise: Warum?

- Eine **formale Aussage**, wie z.B. ein mathematischer Satz, besteht aus Voraussetzungen und einer Behauptung.
- Wie stellt man sicher, dass die Behauptung immer dann wahr ist, wenn alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Ein **Beweis** muss die Behauptung

> mit Hilfe logischer Schlussregeln aus Definitionen, Voraussetzungen, Axiomen und bereits als wahr nachgewiesenen Aussagen herleiten.

Ein Axiom ist eine Aussage, die als wahr gefordert wird. Zum Beispiel fordert man in der Zahlentheorie das „Distributivgesetz“

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

wie auch die Induktionsaxiome.

Beweise: Typische Fehler

- Unzulässiges Argumentieren mit Beispielen, wenn eine Aussage für alle Elemente einer Menge gelten soll,
- Verwendung gleicher Symbole zur Bezeichnung verschiedener Dinge,
- Hantieren mit nicht exakt oder gar widersprüchlich definierten Begriffsbildungen,
- unzulässige Gedankensprünge beim Schlussfolgern,
- Ausnutzung von bis dahin noch unbewiesenen Behauptungen zur Begründung von einzelnen Beweisschritten.

Wie führt man korrekte Beweise?

Wir geben einen Überblick über grundlegende Beweistechniken.

- **Direkter Beweis**: ein Beweis „ohne Umschweife"

Wie führt man korrekte Beweise?

Wir geben einen Überblick über grundlegende Beweistechniken.

- **Direkter Beweis**: ein Beweis „ohne Umschweife"
- **Beweis durch Kontraposition**
  - Um eine Implikation $\phi \to \psi$ zu beweisen, beweise die Implikation $\neg\psi \to \neg\phi$.
  - Beachte, dass die semantische Äquivalenz

    $$\big(\phi \to \psi\big) \equiv \big(\neg\psi \to \neg\phi\big)$$

    gilt.

Wie führt man korrekte Beweise?

Wir geben einen Überblick über grundlegende Beweistechniken.

- **Direkter Beweis**: ein Beweis „ohne Umschweife“
- **Beweis durch Kontraposition**
  - Um eine Implikation $\phi \to \psi$ zu beweisen, beweise die Implikation $\neg\psi \to \neg\phi$.
  - Beachte, dass die semantische Äquivalenz

    $$\big(\phi \to \psi\big) \equiv \big(\neg\psi \to \neg\phi\big)$$

    gilt.
- **Beweis durch Widerspruch (indirekter Beweis)**
  - Um $\phi \to \psi$ zu beweisen, nimm an dass ϕ gilt und führe die zusätzliche Annahme $\neg\psi$ zum Widerspruch,
  - zeige also die semantische Folgerung

    $$\big(\phi \land \neg\psi\big) \models \mathbf{0}.$$

Wie führt man korrekte Beweise?

Wir geben einen Überblick über grundlegende Beweistechniken.

- **Direkter Beweis**: ein Beweis „ohne Umschweife"
- **Beweis durch Kontraposition**
  - Um eine Implikation $\phi \to \psi$ zu beweisen, beweise die Implikation $\neg\psi \to \neg\phi$.
  - Beachte, dass die semantische Äquivalenz
    $$\big(\phi \to \psi\big) \equiv \big(\neg\psi \to \neg\phi\big)$$
    gilt.
- **Beweis durch Widerspruch (indirekter Beweis)**
  - Um $\phi \to \psi$ zu beweisen, nimm an dass ϕ gilt und führe die zusätzliche Annahme $\neg\psi$ zum Widerspruch,
  - zeige also die semantische Folgerung
    $$\big(\phi \wedge \neg\psi\big) \models \mathbf{0}.$$
- **Vollständige Induktion**.

Achtung: ϕ und ψ sind **nicht** notwendigerweise aussagenlogische Formeln!

Direkte Beweise

Wir haben bereits direkte Beweise geführt.

Wir haben gezeigt, dass eine endliche Menge M genau $2^{|M|}$ Teilmengen besitzt.
Wie sahen die Beweisschritte aus?

Wir haben bereits direkte Beweise geführt.

Wir haben gezeigt, dass eine endliche Menge M genau $2^{|M|}$ Teilmengen besitzt.
Wie sahen die Beweisschritte aus?

1. Zuerst haben wir eine bijektive Funktion

$$f : \mathcal{P}(M) \to \mathrm{Abb}(M, \{0, 1\})$$

   von der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ nach $\mathrm{Abb}(M, \{0, 1\})$ konstruiert.
   - $\mathcal{P}(M)$ und $\mathrm{Abb}(M, \{0, 1\})$ sind also gleichgroß.

Wir haben bereits direkte Beweise geführt.

Wir haben gezeigt, dass eine endliche Menge M genau $2^{|M|}$ Teilmengen besitzt. Wie sahen die Beweisschritte aus?

1. Zuerst haben wir eine bijektive Funktion

$$f : \mathcal{P}(M) \to \mathrm{Abb}(M, \{0, 1\})$$

   von der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ nach $\mathrm{Abb}(M, \{0, 1\})$ konstruiert.
   - $\mathcal{P}(M)$ und $\mathrm{Abb}(M, \{0, 1\})$ sind also gleichgroß.
2. Dann haben wir eine bijektive Funktion

$$g : \mathrm{Abb}(A, B) \to B^A$$

   sogar für beliebige endliche Mengen A, B „gebaut“ und damit gezeigt

$$|\mathrm{Abb}(A, B)| = |B|^{|A|}.$$

Wir haben bereits direkte Beweise geführt.

Wir haben gezeigt, dass eine endliche Menge M genau $2^{|M|}$ Teilmengen besitzt. Wie sahen die Beweisschritte aus?

1. Zuerst haben wir eine bijektive Funktion
$$f : \mathcal{P}(M) \to \mathrm{Abb}(M, \{0,1\})$$
von der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ nach $\mathrm{Abb}(M, \{0,1\})$ konstruiert.
   - $\mathcal{P}(M)$ und $\mathrm{Abb}(M, \{0,1\})$ sind also gleichgroß.
2. Dann haben wir eine bijektive Funktion
$$g : \mathrm{Abb}(A, B) \to B^A$$
sogar für beliebige endliche Mengen A, B „gebaut“ und damit gezeigt
$$|\mathrm{Abb}(A, B)| = |B|^{|A|}.$$
3. Jetzt müssen wir nur noch $A = M$ und $B = \{0,1\}$ setzen. Es folgt
$$|\mathcal{P}(M)| \overset{1.}{=} |\mathrm{Abb}(M, \{0,1\})|$$

Wir haben bereits direkte Beweise geführt.

Wir haben gezeigt, dass eine endliche Menge M genau $2^{|M|}$ Teilmengen besitzt. Wie sahen die Beweisschritte aus?

1. Zuerst haben wir eine bijektive Funktion
$$f : \mathcal{P}(M) \to \mathrm{Abb}(M, \{0, 1\})$$
von der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ nach $\mathrm{Abb}(M, \{0, 1\})$ konstruiert.
   - $\mathcal{P}(M)$ und $\mathrm{Abb}(M, \{0, 1\})$ sind also gleichgroß.
2. Dann haben wir eine bijektive Funktion
$$g : \mathrm{Abb}(A, B) \to B^A$$
sogar für beliebige endliche Mengen A, B „gebaut“ und damit gezeigt
$$|\mathrm{Abb}(A, B)| = |B|^{|A|}.$$
3. Jetzt müssen wir nur noch $A = M$ und $B = \{0, 1\}$ setzen. Es folgt
$$|\mathcal{P}(M)| \overset{1.}{=} |\mathrm{Abb}(M, \{0, 1\})| \overset{2.}{=} 2^{|M|}.$$

$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$ für alle reelen Zahlen $a, b \geqslant 0$ (1/2)

Zuerst versuchen wir eine Beweisidee zu erhalten.

1. Die Wurzel stört und wir quadrieren:
   - Statt $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$ zeige die Ungleichung $(\frac{a+b}{2})^2 \geqslant a \cdot b$.

$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$ für alle reelen Zahlen $a, b \geqslant 0$ (1/2)

Zuerst versuchen wir eine Beweisidee zu erhalten.

1. Die Wurzel stört und wir quadrieren:
   - Statt $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$ zeige die Ungleichung $(\frac{a+b}{2})^2 \geqslant a \cdot b$.
2. Wir multiplizieren aus und erhalten die Ungleichung $\frac{a^2+2a \cdot b+b^2}{4} \geqslant a \cdot b$.

$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$ für alle reelen Zahlen $a, b \geqslant 0$ (1/2)

Zuerst versuchen wir eine Beweisidee zu erhalten.

1. Die Wurzel stört und wir quadrieren:
   - Statt $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$ zeige die Ungleichung $(\frac{a+b}{2})^2 \geqslant a \cdot b$.
2. Wir multiplizieren aus und erhalten die Ungleichung $\frac{a^2+2a \cdot b+b^2}{4} \geqslant a \cdot b$.
3. Wir multiplizieren mit 4 und erhalten $a^2 + 2a \cdot b + b^2 \geqslant 4a \cdot b$.

Zuerst versuchen wir eine Beweisidee zu erhalten.

1. Die Wurzel stört und wir quadrieren:
   - Statt $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$ zeige die Ungleichung $(\frac{a+b}{2})^2 \geqslant a \cdot b$.
2. Wir multiplizieren aus und erhalten die Ungleichung $\frac{a^2+2a \cdot b+b^2}{4} \geqslant a \cdot b$.
3. Wir multiplizieren mit 4 und erhalten $a^2 + 2a \cdot b + b^2 \geqslant 4a \cdot b$.
4. Wenn wir $4a \cdot b$ nach links „bringen“, ist $a^2 - 2a \cdot b + b^2 \geqslant 0$ zu zeigen.

$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$ für alle reelen Zahlen $a, b \geqslant 0$ (1/2)

Zuerst versuchen wir eine Beweisidee zu erhalten.

1. Die Wurzel stört und wir quadrieren:
   - Statt $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$ zeige die Ungleichung $(\frac{a+b}{2})^2 \geqslant a \cdot b$.
2. Wir multiplizieren aus und erhalten die Ungleichung $\frac{a^2+2a \cdot b+b^2}{4} \geqslant a \cdot b$.
3. Wir multiplizieren mit 4 und erhalten $a^2 + 2a \cdot b + b^2 \geqslant 4a \cdot b$.
4. Wenn wir $4a \cdot b$ nach links „bringen“, ist $a^2 - 2a \cdot b + b^2 \geqslant 0$ zu zeigen.
   - $a^2 - 2a \cdot b + b^2 = (a - b)^2$ gilt.
   - Jedes Quadrat ist nicht-negativ und die Ungleichung stimmt!?!

Zuerst versuchen wir eine Beweisidee zu erhalten.

1. Die Wurzel stört und wir quadrieren:
   - Statt $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$ zeige die Ungleichung $(\frac{a+b}{2})^2 \geqslant a \cdot b$.
2. Wir multiplizieren aus und erhalten die Ungleichung $\frac{a^2+2a \cdot b+b^2}{4} \geqslant a \cdot b$.
3. Wir multiplizieren mit 4 und erhalten $a^2 + 2a \cdot b + b^2 \geqslant 4a \cdot b$.
4. Wenn wir $4a \cdot b$ nach links „bringen“, ist $a^2 - 2a \cdot b + b^2 \geqslant 0$ zu zeigen.
   - $a^2 - 2a \cdot b + b^2 = (a-b)^2$ gilt.
   - Jedes Quadrat ist nicht-negativ und die Ungleichung stimmt!?!

Das ist leider kein Beweis, weil ....

Zuerst versuchen wir eine Beweisidee zu erhalten.

1. Die Wurzel stört und wir quadrieren:
   - Statt $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$ zeige die Ungleichung $(\frac{a+b}{2})^2 \geqslant a \cdot b$.
2. Wir multiplizieren aus und erhalten die Ungleichung $\frac{a^2+2a \cdot b+b^2}{4} \geqslant a \cdot b$.
3. Wir multiplizieren mit 4 und erhalten $a^2 + 2a \cdot b + b^2 \geqslant 4a \cdot b$.
4. Wenn wir $4a \cdot b$ nach links „bringen“, ist $a^2 - 2a \cdot b + b^2 \geqslant 0$ zu zeigen.
   - $a^2 - 2a \cdot b + b^2 = (a - b)^2$ gilt.
   - Jedes Quadrat ist nicht-negativ und die Ungleichung stimmt!?!

Das ist leider kein Beweis, weil ....
.... wir **aus** der Ungleichung $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$ eine wahre Aussage folgern **:-((**

$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$ für alle reelen Zahlen $a, b \geqslant 0$ (2/2)

Hoffentlich haben wir nur mit äquivalenten Umformungen gearbeitet: Mal sehen.

$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$ für alle reelen Zahlen $a, b \geqslant 0$ (2/2)

Hoffentlich haben wir nur mit äquivalenten Umformungen gearbeitet: Mal sehen.

1. $a^2 - 2a \cdot b + b^2 = (a-b)^2$ gilt und $a^2 - 2a \cdot b + b^2 \geqslant 0$ folgt.

$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$ für alle reelen Zahlen $a, b \geqslant 0$ (2/2)

Hoffentlich haben wir nur mit äquivalenten Umformungen gearbeitet: Mal sehen.

1. $a^2 - 2a \cdot b + b^2 = (a - b)^2$ gilt und $a^2 - 2a \cdot b + b^2 \geqslant 0$ folgt.
2. Wir addieren $4a \cdot b$ auf beide Seiten: $a^2 + 2a \cdot b + b^2 \geqslant 4a \cdot b$ gilt ebenfalls.

Hoffentlich haben wir nur mit äquivalenten Umformungen gearbeitet: Mal sehen.

1. $a^2 - 2a \cdot b + b^2 = (a-b)^2$ gilt und $a^2 - 2a \cdot b + b^2 \geqslant 0$ folgt.
2. Wir addieren $4a \cdot b$ auf beide Seiten: $a^2 + 2a \cdot b + b^2 \geqslant 4a \cdot b$ gilt ebenfalls.
3. Die linke Seite der Ungleichung stimmt mit $(a+b)^2$ überein: Es gilt also

$$(a+b)^2 \geqslant 4a \cdot b.$$

$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$ für alle reelen Zahlen $a, b \geqslant 0$ (2/2)

Hoffentlich haben wir nur mit äquivalenten Umformungen gearbeitet: Mal sehen.

1. $a^2 - 2a \cdot b + b^2 = (a-b)^2$ gilt und $a^2 - 2a \cdot b + b^2 \geqslant 0$ folgt.
2. Wir addieren $4a \cdot b$ auf beide Seiten: $a^2 + 2a \cdot b + b^2 \geqslant 4a \cdot b$ gilt ebenfalls.
3. Die linke Seite der Ungleichung stimmt mit $(a+b)^2$ überein: Es gilt also
$$(a+b)^2 \geqslant 4a \cdot b.$$
4. Wir dividieren beide Seiten durch 4 und ziehen die Wurzel:
$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$
und das war zu zeigen.

Na, geht doch!

Beweis durch Kontraposition

Wenn $n \in \mathbb{N}$ und n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade

Im Beweis durch Kontraposition genügt der Nachweis,

Wenn n ungerade ist, dann ist auch n^2 ungerade.

Wenn $n \in \mathbb{N}$ und n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade

Im Beweis durch Kontraposition genügt der Nachweis,

Wenn n ungerade ist, dann ist auch n^2 ungerade.

Sei also n ungerade.

1. Eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ ist **genau dann** ungerade, wenn es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$m = 2k + 1.$$

Wenn $n \in \mathbb{N}$ und n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade

Im Beweis durch Kontraposition genügt der Nachweis,

Wenn n ungerade ist, dann ist auch n^2 ungerade.

Sei also n ungerade.

1. Eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ ist **genau dann** ungerade, wenn es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt mit
$$m = 2k + 1.$$
2. n ist nach Annahme ungerade und es gibt $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k + 1$.

Wenn $n \in \mathbb{N}$ und n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade

Im Beweis durch Kontraposition genügt der Nachweis,

Wenn n ungerade ist, dann ist auch n^2 ungerade.

Sei also n ungerade.

1. Eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ ist **genau dann** ungerade, wenn es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt mit
$$m = 2k + 1.$$
2. n ist nach Annahme ungerade und es gibt $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k + 1$.
3. Wir quadrieren n und erhalten
$$n^2 = (2k + 1)^2 =$$

Wenn $n \in \mathbb{N}$ und n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade

Im Beweis durch Kontraposition genügt der Nachweis,

Wenn n ungerade ist, dann ist auch n^2 ungerade.

Sei also n ungerade.

1. Eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ ist **genau dann** ungerade, wenn es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt mit
$$m = 2k + 1.$$
2. n ist nach Annahme ungerade und es gibt $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k + 1$.
3. Wir quadrieren n und erhalten
$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

Wenn $n \in \mathbb{N}$ und n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade

Im Beweis durch Kontraposition genügt der Nachweis,

Wenn n ungerade ist, dann ist auch n^2 ungerade.

Sei also n ungerade.

1. Eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ ist **genau dann** ungerade, wenn es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt mit
$$m = 2k + 1.$$
2. n ist nach Annahme ungerade und es gibt $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k + 1$.
3. Wir quadrieren n und erhalten
$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Wenn $n \in \mathbb{N}$ und n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade

Im Beweis durch Kontraposition genügt der Nachweis,

Wenn n ungerade ist, dann ist auch n^2 ungerade.

Sei also n ungerade.

1. Eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ ist **genau dann** ungerade, wenn es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt mit
$$m = 2k + 1.$$
2. n ist nach Annahme ungerade und es gibt $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k + 1$.
3. Wir quadrieren n und erhalten
$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$
und damit ist auch n^2 ungerade.

Beweis durch Widerspruch

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Im Beweis durch Widerspruch nehmen wir an, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist und müssen einen Widerspruch herleiten.

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Im Beweis durch Widerspruch nehmen wir an, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist und müssen einen Widerspruch herleiten.

1. Wenn $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist, dann gibt es **teilerfremde** Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ mit
$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Im Beweis durch Widerspruch nehmen wir an, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist und müssen einen Widerspruch herleiten.

1. Wenn $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist, dann gibt es **teilerfremde** Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ mit
$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

2. Wir quadrieren und erhalten die Gleichung
$$p^2 = 2 \cdot q^2.$$

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Im Beweis durch Widerspruch nehmen wir an, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist und müssen einen Widerspruch herleiten.

1. Wenn $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist, dann gibt es **teilerfremde** Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ mit
$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$
2. Wir quadrieren und erhalten die Gleichung
$$p^2 = 2 \cdot q^2.$$
3. Also ist p^2 eine gerade Zahl.

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Im Beweis durch Widerspruch nehmen wir an, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist und müssen einen Widerspruch herleiten.

1. Wenn $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist, dann gibt es **teilerfremde** Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ mit
$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$
2. Wir quadrieren und erhalten die Gleichung
$$p^2 = 2 \cdot q^2.$$
3. Also ist p^2 eine gerade Zahl.
    - Wir haben aber gerade gezeigt, dass dann auch **p gerade** ist.
    - Wenn $p = 2r$, dann

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Im Beweis durch Widerspruch nehmen wir an, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist und müssen einen Widerspruch herleiten.

1. Wenn $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist, dann gibt es **teilerfremde** Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ mit
$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$
2. Wir quadrieren und erhalten die Gleichung
$$p^2 = 2 \cdot q^2.$$
3. Also ist p^2 eine gerade Zahl.
    - Wir haben aber gerade gezeigt, dass dann auch **p gerade** ist.
    - Wenn $p = 2r$, dann folgt also $p^2 = 4r^2$

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Im Beweis durch Widerspruch nehmen wir an, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist und müssen einen Widerspruch herleiten.

1. Wenn $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist, dann gibt es **teilerfremde** Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ mit
$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$
2. Wir quadrieren und erhalten die Gleichung
$$p^2 = 2 \cdot q^2.$$
3. Also ist p^2 eine gerade Zahl.
   - Wir haben aber gerade gezeigt, dass dann auch **p gerade** ist.
   - Wenn $p = 2r$, dann folgt also $p^2 = 4r^2 = 2q^2$

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Im Beweis durch Widerspruch nehmen wir an, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist und müssen einen Widerspruch herleiten.

1. Wenn $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist, dann gibt es **teilerfremde** Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ mit
$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$
2. Wir quadrieren und erhalten die Gleichung
$$p^2 = 2 \cdot q^2.$$
3. Also ist p^2 eine gerade Zahl.
   - Wir haben aber gerade gezeigt, dass dann auch **p gerade** ist.
   - Wenn $p = 2r$, dann folgt also $p^2 = 4r^2 = 2q^2$ und damit $2r^2 = q^2$.

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Im Beweis durch Widerspruch nehmen wir an, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist und müssen einen Widerspruch herleiten.

1. Wenn $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist, dann gibt es **teilerfremde** Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ mit
$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

2. Wir quadrieren und erhalten die Gleichung
$$p^2 = 2 \cdot q^2.$$

3. Also ist p^2 eine gerade Zahl.
   - Wir haben aber gerade gezeigt, dass dann auch **p gerade** ist.
   - Wenn $p = 2r$, dann folgt also $p^2 = 4r^2 = 2q^2$ und damit $2r^2 = q^2$.

4. Dann ist aber q^2 gerade und damit ist auch **q gerade**: Die Zahlen p und q haben den gemeinsamen Teiler 2 im **Widerspruch** zur Teilerfremdheit $\lightning$

Ein weiterer Beweis durch Widerspruch

Es gibt **keine** surjektive Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

„Anschaulich“: Die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ ist **sehr viel** größer als $\mathbb{N}$.

Ein weiterer Beweis durch Widerspruch

Es gibt **keine** surjektive Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
„Anschaulich“: Die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ ist **sehr viel** größer als $\mathbb{N}$.

1. Im Beweis durch Widerspruch nehmen wir an, dass die Funktion

$$f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

surjektiv ist.

Ein weiterer Beweis durch Widerspruch

Es gibt **keine** surjektive Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
„Anschaulich“: Die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ ist **sehr viel** größer als $\mathbb{N}$.

1. Im Beweis durch Widerspruch nehmen wir an, dass die Funktion

$$f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

   surjektiv ist.
2. Die zentrale Idee: Wir definieren die Menge

$$M \ := \ \{ \, n \in \mathbb{N} \ : \ n \notin f(n) \, \},$$

   die offensichtlich eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist: Also gilt $M \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

$M = \{ n \in \mathbb{N} \, : \, n \notin f(n) \}$

3. Da f surjektiv ist, muss es ein $m \in \mathbb{N}$ geben mit $f(m) = M$.
   - Klar: Entweder gilt $m \in M$ oder es gilt $m \notin M$.

$M = \{ n \in \mathbb{N} : n \notin f(n) \}$

3. Da f surjektiv ist, muss es ein $m \in \mathbb{N}$ geben mit $f(m) = M$.
   - Klar: Entweder gilt $m \in M$ oder es gilt $m \notin M$.
4. *Fall 1: $m \notin M$:*

$M = \{\, n \in \mathbb{N} \ : \ n \notin f(n) \,\}$

3. Da f surjektiv ist, muss es ein $m \in \mathbb{N}$ geben mit $f(m) = M$.
   - Klar: Entweder gilt $m \in M$ oder es gilt $m \notin M$.
4. *Fall 1: $m \notin M$:*
   - Es ist $f(m) = M$ und nach Annahme ist $m \notin M = f(m)$.

$M = \{ n \in \mathbb{N} : n \notin f(n) \}$

3. Da f surjektiv ist, muss es ein $m \in \mathbb{N}$ geben mit $f(m) = M$.
   - Klar: Entweder gilt $m \in M$ oder es gilt $m \notin M$.
4. *Fall 1: $m \notin M$:*
   - Es ist $f(m) = M$ und nach Annahme ist $m \notin M = f(m)$.
   - Nach Definition der Menge M folgt

$M = \{ n \in \mathbb{N} : n \notin f(n) \}$

3. Da f surjektiv ist, muss es ein $m \in \mathbb{N}$ geben mit $f(m) = M$.
   - Klar: Entweder gilt $m \in M$ oder es gilt $m \notin M$.
4. *Fall 1: $m \notin M$:*
   - Es ist $f(m) = M$ und nach Annahme ist $m \notin M = f(m)$.
   - Nach Definition der Menge M folgt $m \in M$. ↯
5. *Fall 2: $m \in M$:*

$M \; = \{\, n \in \mathbb{N} \;:\; n \notin f(n) \,\}$

3. Da f surjektiv ist, muss es ein $m \in \mathbb{N}$ geben mit $f(m) = M$.
   - Klar: Entweder gilt $m \in M$ oder es gilt $m \notin M$.
4. *Fall 1: $m \notin M$:*
   - Es ist $f(m) = M$ und nach Annahme ist $m \notin M = f(m)$.
   - Nach Definition der Menge M folgt $m \in M$. $\lightning$
5. *Fall 2: $m \in M$:*
   - Es ist $f(m) = M$ und nach Annahme ist $m \in M = f(m)$.

$M = \{ n \in \mathbb{N} : n \notin f(n) \}$

3. Da f surjektiv ist, muss es ein $m \in \mathbb{N}$ geben mit $f(m) = M$.
   - Klar: Entweder gilt $m \in M$ oder es gilt $m \notin M$.
4. *Fall 1: $m \notin M$:*
   - Es ist $f(m) = M$ und nach Annahme ist $m \notin M = f(m)$.
   - Nach Definition der Menge M folgt $m \in M$. $\lightning$
5. *Fall 2: $m \in M$:*
   - Es ist $f(m) = M$ und nach Annahme ist $m \in M = f(m)$.
   - Nach Definition der Menge M folgt

$M = \{ n \in \mathbb{N} : n \notin f(n) \}$

3. Da f surjektiv ist, muss es ein $m \in \mathbb{N}$ geben mit $f(m) = M$.
   - Klar: Entweder gilt $m \in M$ oder es gilt $m \notin M$.
4. *Fall 1: $m \notin M$:*
   - Es ist $f(m) = M$ und nach Annahme ist $m \notin M = f(m)$.
   - Nach Definition der Menge M folgt $m \in M$. $\lightning$
5. *Fall 2: $m \in M$:*
   - Es ist $f(m) = M$ und nach Annahme ist $m \in M = f(m)$.
   - Nach Definition der Menge M folgt $m \notin M$. $\lightning$

Mit einem ähnlichen Argument hat Cantor gezeigt, dass
die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen überabzählbar groß ist.

Wie ist Cantor auf die Idee gekommen, die Menge M so zu definieren?

Beweis durch Diagonalisierung (1/3)

Mit einem ähnlichen Argument hat Cantor gezeigt, dass die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen überabzählbar groß ist.

Wie ist Cantor auf die Idee gekommen, die Menge M so zu definieren?
Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ können wir durch folgende Tabelle repräsentieren

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\cdots$
0	$a_{0,0}$	$a_{0,1}$	$a_{0,2}$	$a_{0,3}$	$a_{0,4}$	$a_{0,5}$	$\cdots$
1	$a_{1,0}$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$	$a_{1,5}$	$\cdots$
2	$a_{2,0}$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$a_{2,4}$	$a_{2,5}$	$\cdots$
3	$a_{3,0}$	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	$a_{3,4}$	$a_{3,5}$	$\cdots$
4	$a_{4,0}$	$a_{4,1}$	$a_{4,2}$	$a_{4,3}$	$a_{4,4}$	$a_{4,5}$	$\cdots$
5	$a_{5,0}$	$a_{5,1}$	$a_{5,2}$	$a_{5,3}$	$a_{5,4}$	$a_{5,5}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

wobei $a_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{falls } j \in f(i) \\ 0 & \text{falls } j \notin f(i). \end{cases}$ der Eintrag in Zeile i und Spalte j ist.

Beweis durch Diagonalisierung (2/3)

Zeile i dieser Tabelle repräsentiert die Menge $f(i)$, denn

$$f(i) \;=\; \{j \in \mathbb{N} \;:\; a_{i,j} = 1\}.$$

Beweis durch Diagonalisierung (2/3)

Zeile i dieser Tabelle repräsentiert die Menge $f(i)$, denn

$$f(i) \;=\; \{j \in \mathbb{N} \;:\; a_{i,j} = 1\}.$$

Wir wählen nun die Folge

$$b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad b_5 \quad \cdots$$

so, dass sich b_j vom Eintrag $a_{j,j}$ in der **Diagonalen** der Tabelle unterscheidet.
D.h., wir wählen

$$b_j \;:=\; \begin{cases} 0 & \text{falls } a_{j,j} = 1 \\ 1 & \text{falls } a_{j,j} = 0, \end{cases}$$

für alle $j \in \mathbb{N}$.

Zeile i dieser Tabelle repräsentiert die Menge $f(i)$, denn

$$f(i) \;=\; \{j \in \mathbb{N} \;:\; a_{i,j} = 1\}.$$

Wir wählen nun die Folge

$$b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad b_5 \quad \cdots$$

so, dass sich b_j vom Eintrag $a_{j,j}$ in der **Diagonalen** der Tabelle unterscheidet. D.h., wir wählen

$$b_j \;:=\; \begin{cases} 0 & \text{falls } a_{j,j} = 1 \\ 1 & \text{falls } a_{j,j} = 0, \end{cases}$$

für alle $j \in \mathbb{N}$.

Man überzeuge sich, dass

$$M = \;\{j \in \mathbb{N} \;:\; b_j = 1\}$$

gilt.

Beweis durch Diagonalisierung (2/3)

Zeile i dieser Tabelle repräsentiert die Menge $f(i)$, denn

$$f(i) \;=\; \{j \in \mathbb{N} \;:\; a_{i,j} = 1\}.$$

Wir wählen nun die Folge

$$b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad b_5 \quad \cdots$$

so, dass sich b_j vom Eintrag $a_{j,j}$ in der **Diagonalen** der Tabelle unterscheidet.
D.h., wir wählen

$$b_j \;:=\; \begin{cases} 0 & \text{falls } a_{j,j} = 1 \\ 1 & \text{falls } a_{j,j} = 0, \end{cases}$$

für alle $j \in \mathbb{N}$.

Man überzeuge sich, dass

$$M = \;\{j \in \mathbb{N} \;:\; b_j = 1\}$$

gilt. $\Rightarrow$ M liegt nicht im Bild der Funktion f und f ist daher nicht surjektiv.

- Jedes C++ Programm P lässt sich als eine natürliche Zahl n_P auffassen.
  - Wir nennen n_P „eine Kodierung von P“.

Beweis durch Diagonalisierung (3/3)

- Jedes C++ Programm P lässt sich als eine natürliche Zahl n_P auffassen.
  - Wir nennen n_P „eine Kodierung von P“.
- Betrachte nur C++ Programme, die eine natürliche Zahl als Eingabe erwarten und dann *akzeptieren*, *verwerfen* oder *nicht halten*.

- Jedes C++ Programm P lässt sich als eine natürliche Zahl n_P auffassen.
  - Wir nennen n_P „eine Kodierung von P“.
- Betrachte nur C++ Programme, die eine natürliche Zahl als Eingabe erwarten und dann *akzeptieren*, *verwerfen* oder *nicht halten*.

Es gibt kein C++ Programm Q, so dass

$$Q \text{ akzeptiert } n_P \Leftrightarrow P \text{ akzeptiert } n_P \text{ nicht.}$$

In der „Theoretischen Informatik 1“ wird der vollständige Beweis gezeigt.

Beweis durch Diagonalisierung (3/3)

- Jedes C++ Programm P lässt sich als eine natürliche Zahl n_P auffassen.
  - Wir nennen n_P „eine Kodierung von P“.
- Betrachte nur C++ Programme, die eine natürliche Zahl als Eingabe erwarten und dann *akzeptieren*, *verwerfen* oder *nicht halten*.

Es gibt kein C++ Programm Q, so dass

$$Q \text{ akzeptiert } n_P \Leftrightarrow P \text{ akzeptiert } n_P \text{ nicht.}$$

In der „Theoretischen Informatik 1“ wird der vollständige Beweis gezeigt.

Es gibt also **keinen „Super-Compiler“** Q, der voraussagt,
ob ein Programm P eine (beliebige) Eingabe $n \in \mathbb{N}$ akzeptiert!

Denn sonst könnte Q voraussagen, dass P seine Kodierung n_P nicht akzeptiert.

Beweis durch Kontraposition und durch Widerspruch

Wenn eine Aussage durch einen *Beweis durch Kontraposition* beweisbar ist, dann auch durch einen *Beweis durch Widerspruch*.

Beweis durch Kontraposition und durch Widerspruch

Wenn eine Aussage durch einen *Beweis durch Kontraposition* beweisbar ist, dann auch durch einen *Beweis durch Widerspruch*.

Die Aussage $\phi \to \psi$ habe einen Beweis durch Kontraposition.

(a) Dann wird also $\neg\psi \to \neg\phi$ bewiesen.

Beweis durch Kontraposition und durch Widerspruch

Wenn eine Aussage durch einen *Beweis durch Kontraposition* beweisbar ist, dann auch durch einen *Beweis durch Widerspruch*.

Die Aussage $\phi \to \psi$ habe einen Beweis durch Kontraposition.

(a) Dann wird also $\neg\psi \to \neg\phi$ bewiesen.

(b) In einem Beweis durch Widerspruch wird angenommen, dass ϕ, aber auch $\neg\psi$ gilt.

- Aus $\neg\psi$ können wir $\neg\phi$ nach Teil (a) ableiten.
- In (b) haben wir angenommen, dass ϕ gilt:

Wir haben den Widerspruch $\phi \land \neg\phi$ erhalten ↯

Vollständige Induktion

Die Grundidee der vollständigen Induktion

$A(n)$ sei eine Aussage über die natürliche Zahl n.
Das Ziel ist, zu zeigen, dass die Aussage $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

Die Grundidee der vollständigen Induktion

$A(n)$ sei eine Aussage über die natürliche Zahl n.
Das Ziel ist, zu zeigen, dass die Aussage $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

(a) **Induktionsanfang** bzw. **Induktionsbasis:**
Zuerst zeige, dass die Aussage $A(n)$ für die Zahl $n = 0$ gilt.

Die Grundidee der vollständigen Induktion

$A(n)$ sei eine Aussage über die natürliche Zahl n.
Das Ziel ist, zu zeigen, dass die Aussage $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

(a) **Induktionsanfang** bzw. **Induktionsbasis:**
Zuerst zeige, dass die Aussage $A(n)$ für die Zahl $n = 0$ gilt.

(b) **Induktionsschritt:** Für jede beliebige natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$
zeige die Aussage $A(n + 1)$, falls die *Induktionsannahme* $A(n)$ wahr ist.

Die Grundidee der vollständigen Induktion

$A(n)$ sei eine Aussage über die natürliche Zahl n.
Das Ziel ist, zu zeigen, dass die Aussage $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

(a) **Induktionsanfang** bzw. **Induktionsbasis:**
Zuerst zeige, dass die Aussage $A(n)$ für die Zahl $n = 0$ gilt.

(b) **Induktionsschritt:** Für jede beliebige natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$
zeige die Aussage $A(n+1)$, falls die *Induktionsannahme* $A(n)$ wahr ist.

Wenn (a) und (b) bewiesen sind, dann wird eine **Lawine** losgetreten:

1. $A(0)$ ist wahr gemäß der Induktionsbasis (a).

Die Grundidee der vollständigen Induktion

$A(n)$ sei eine Aussage über die natürliche Zahl n.
Das Ziel ist, zu zeigen, dass die Aussage $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

(a) **Induktionsanfang** bzw. **Induktionsbasis:**
Zuerst zeige, dass die Aussage $A(n)$ für die Zahl $n = 0$ gilt.

(b) **Induktionsschritt:** Für jede beliebige natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$
zeige die Aussage $A(n+1)$, falls die *Induktionsannahme* $A(n)$ wahr ist.

Wenn (a) und (b) bewiesen sind, dann wird eine **Lawine** losgetreten:

1. $A(0)$ ist wahr gemäß der Induktionsbasis (a).
2. $A(1)$ ist wahr gemäß 1. und dem Induktionsschritt (b) für $n = 0$,

Die Grundidee der vollständigen Induktion

$A(n)$ sei eine Aussage über die natürliche Zahl n.
Das Ziel ist, zu zeigen, dass die Aussage $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

(a) **Induktionsanfang** bzw. **Induktionsbasis:**
Zuerst zeige, dass die Aussage $A(n)$ für die Zahl $n = 0$ gilt.

(b) **Induktionsschritt:** Für jede beliebige natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$
zeige die Aussage $A(n+1)$, falls die *Induktionsannahme* $A(n)$ wahr ist.

Wenn (a) und (b) bewiesen sind, dann wird eine **Lawine** losgetreten:

1. $A(0)$ ist wahr gemäß der Induktionsbasis (a).
2. $A(1)$ ist wahr gemäß 1. und dem Induktionsschritt (b) für $n = 0$,
3. $A(2)$ ist wahr gemäß 2. und dem Induktionsschritt (b) für $n = 1$,

Die Grundidee der vollständigen Induktion

$A(n)$ sei eine Aussage über die natürliche Zahl n.
Das Ziel ist, zu zeigen, dass die Aussage $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

(a) **Induktionsanfang** bzw. **Induktionsbasis:**
Zuerst zeige, dass die Aussage $A(n)$ für die Zahl $n = 0$ gilt.

(b) **Induktionsschritt:** Für jede beliebige natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$
zeige die Aussage $A(n+1)$, falls die *Induktionsannahme* $A(n)$ wahr ist.

Wenn (a) und (b) bewiesen sind, dann wird eine **Lawine** losgetreten:

1. $A(0)$ ist wahr gemäß der Induktionsbasis (a).
2. $A(1)$ ist wahr gemäß 1. und dem Induktionsschritt (b) für $n = 0$,
3. $A(2)$ ist wahr gemäß 2. und dem Induktionsschritt (b) für $n = 1$,
4. $A(3)$ ist wahr gemäß 3. und dem Induktionsschritt (b) für $n = 2$,

Die Grundidee der vollständigen Induktion

$A(n)$ sei eine Aussage über die natürliche Zahl n.
Das Ziel ist, zu zeigen, dass die Aussage $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

(a) **Induktionsanfang** bzw. **Induktionsbasis:**
Zuerst zeige, dass die Aussage $A(n)$ für die Zahl $n = 0$ gilt.

(b) **Induktionsschritt:** Für jede beliebige natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$
zeige die Aussage $A(n+1)$, falls die *Induktionsannahme* $A(n)$ wahr ist.

Wenn (a) und (b) bewiesen sind, dann wird eine **Lawine** losgetreten:

1. $A(0)$ ist wahr gemäß der Induktionsbasis (a).
2. $A(1)$ ist wahr gemäß 1. und dem Induktionsschritt (b) für $n = 0$,
3. $A(2)$ ist wahr gemäß 2. und dem Induktionsschritt (b) für $n = 1$,
4. $A(3)$ ist wahr gemäß 3. und dem Induktionsschritt (b) für $n = 2$,
5. $A(4)$ ist wahr gemäß 4. und dem Induktionsschritt (b) für $n = 3$,

Die Grundidee der vollständigen Induktion

$A(n)$ sei eine Aussage über die natürliche Zahl n.
Das Ziel ist, zu zeigen, dass die Aussage $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

(a) **Induktionsanfang** bzw. **Induktionsbasis:**
Zuerst zeige, dass die Aussage $A(n)$ für die Zahl $n = 0$ gilt.

(b) **Induktionsschritt:** Für jede beliebige natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$
zeige die Aussage $A(n+1)$, falls die *Induktionsannahme* $A(n)$ wahr ist.

Wenn (a) und (b) bewiesen sind, dann wird eine **Lawine** losgetreten:

1. $A(0)$ ist wahr gemäß der Induktionsbasis (a).
2. $A(1)$ ist wahr gemäß 1. und dem Induktionsschritt (b) für $n = 0$,
3. $A(2)$ ist wahr gemäß 2. und dem Induktionsschritt (b) für $n = 1$,
4. $A(3)$ ist wahr gemäß 3. und dem Induktionsschritt (b) für $n = 2$,
5. $A(4)$ ist wahr gemäß 4. und dem Induktionsschritt (b) für $n = 3$,

   ....

Die Grundidee der vollständigen Induktion

$A(n)$ sei eine Aussage über die natürliche Zahl n.
Das Ziel ist, zu zeigen, dass die Aussage $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

(a) **Induktionsanfang** bzw. **Induktionsbasis:**
Zuerst zeige, dass die Aussage $A(n)$ für die Zahl $n = 0$ gilt.

(b) **Induktionsschritt:** Für jede beliebige natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$
zeige die Aussage $A(n+1)$, falls die *Induktionsannahme* $A(n)$ wahr ist.

Wenn (a) und (b) bewiesen sind, dann wird eine **Lawine** losgetreten:

1. $A(0)$ ist wahr gemäß der Induktionsbasis (a).
2. $A(1)$ ist wahr gemäß 1. und dem Induktionsschritt (b) für $n = 0$,
3. $A(2)$ ist wahr gemäß 2. und dem Induktionsschritt (b) für $n = 1$,
4. $A(3)$ ist wahr gemäß 3. und dem Induktionsschritt (b) für $n = 2$,
5. $A(4)$ ist wahr gemäß 4. und dem Induktionsschritt (b) für $n = 3$,

. . . .

Insgesamt hat man damit gezeigt, dass die Aussage $A(n)$ **für alle** $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

Es ist richtig dunkel

Wir befinden uns in einem stockdunklem Gang, der nach einer Seite unbeschränkt lang ist. Den Gang können wir nur über die andere Seite verlassen.

? Was tun, wir kennen noch nicht einmal die Länge $\mathbf{n}$ des Weges bis zum Ende des Ganges!?!

Es ist richtig dunkel

Wir befinden uns in einem stockdunklem Gang, der nach einer Seite unbeschränkt lang ist. Den Gang können wir nur über die andere Seite verlassen.

? Was tun, wir kennen noch nicht einmal die Länge **n** des Weges bis zum Ende des Ganges!?!

Wie können wir mit möglichst wenigen Schritten den Gang verlassen?

- Wie wär's mit: Ein Schritt nach „vorn", zwei zurück, drei nach vorn, vier zurück, . . .
- Und wieviele Schritte sind das?

Die Summe der ersten n Zahlen

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n =$$

Die Summe der ersten n Zahlen

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Die Summe der ersten n Zahlen

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Mathematische Induktion nach n:

Die Summe der ersten n Zahlen

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$:

Die Summe der ersten n Zahlen

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$

Die Summe der ersten n Zahlen

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$.

Die Summe der ersten n Zahlen

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$. ✓

Die Summe der ersten n Zahlen

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$. ✓
  - INDUKTIONSSCHRITT von n auf $n + 1$:

Die Summe der ersten n Zahlen

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$. ✓
  - INDUKTIONSSCHRITT von n auf $n+1$:
    - Wir können die *Induktionsannahme* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ voraussetzen.

Die Summe der ersten n Zahlen

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$. ✓
  - INDUKTIONSSCHRITT von n auf $n+1$:
    - ⋆ Wir können die *Induktionsannahme* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ voraussetzen.
    - ⋆ $\sum_{i=1}^{n+1} i =$

Die Summe der ersten n Zahlen

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$. ✓
  - INDUKTIONSSCHRITT von n auf $n + 1$:
    - Wir können die *Induktionsannahme* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ voraussetzen.
    - $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) =$

Die Summe der ersten n Zahlen

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$. ✓
  - INDUKTIONSSCHRITT von n auf $n+1$:
    - ⋆ Wir können die *Induktionsannahme* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ voraussetzen.
    - ⋆ $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) =$

Die Summe der ersten n Zahlen

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$. ✓
  - INDUKTIONSSCHRITT von n auf $n+1$:
    - Wir können die *Induktionsannahme* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ voraussetzen.
    - $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} =$

Die Summe der ersten n Zahlen

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$. ✓
  - INDUKTIONSSCHRITT von n auf $n+1$:
    - Wir können die *Induktionsannahme* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ voraussetzen.
    - $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+2) \cdot (n+1)}{2} =$

Die Summe der ersten n Zahlen

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$. ✓
  - INDUKTIONSSCHRITT von n auf $n + 1$:
    - Wir können die *Induktionsannahme* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ voraussetzen.
    - $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+2) \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$. ✓

Die Summe der ersten n Zahlen

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$. ✓
  - INDUKTIONSSCHRITT von n auf $n+1$:
    - Wir können die *Induktionsannahme* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ voraussetzen.
    - $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+2) \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$. ✓
- Ein direktes Argument:

Die Summe der ersten n Zahlen

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$. ✓
  - INDUKTIONSSCHRITT von n auf $n+1$:
    - Wir können die *Induktionsannahme* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ voraussetzen.
    - $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+2) \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$. ✓
- Ein direktes Argument:
  - Betrachte ein Gitter mit n Zeilen und n Spalten:

Die Summe der ersten n Zahlen

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$. ✓
  - INDUKTIONSSCHRITT von n auf $n + 1$:
    - Wir können die *Induktionsannahme* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ voraussetzen.
    - $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+2) \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$. ✓
- Ein direktes Argument:
  - Betrachte ein Gitter mit n Zeilen und n Spalten: n^2 Gitterpunkte.

Die Summe der ersten n Zahlen

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$. ✓
  - INDUKTIONSSCHRITT von n auf $n+1$:
    - Wir können die *Induktionsannahme* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ voraussetzen.
    - $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+2) \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$. ✓
- Ein direktes Argument:
  - Betrachte ein Gitter mit n Zeilen und n Spalten: n^2 Gitterpunkte.
  - Wir müssen die Gitterpunkte unterhalb der Hauptdiagonale und auf der Hauptdiagonale zählen.

Die Summe der ersten n Zahlen

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$. ✓
  - INDUKTIONSSCHRITT von n auf $n + 1$:
    - Wir können die *Induktionsannahme* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ voraussetzen.
    - $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+2) \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$. ✓
- Ein direktes Argument:
  - Betrachte ein Gitter mit n Zeilen und n Spalten: n^2 Gitterpunkte.
  - Wir müssen die Gitterpunkte unterhalb der Hauptdiagonale und auf der Hauptdiagonale zählen.
  - Die Hauptdiagonale besitzt n Gitterpunkte

Die Summe der ersten n Zahlen

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$. ✓
  - INDUKTIONSSCHRITT von n auf $n+1$:
    - Wir können die *Induktionsannahme* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ voraussetzen.
    - $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+2) \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$. ✓
- Ein direktes Argument:
  - Betrachte ein Gitter mit n Zeilen und n Spalten: n^2 Gitterpunkte.
  - Wir müssen die Gitterpunkte unterhalb der Hauptdiagonale und auf der Hauptdiagonale zählen.
  - Die Hauptdiagonale besitzt n Gitterpunkte und unterhalb der Hauptdiagonale befindet sich die Hälfte der verbleibenden $n^2 - n$ Gitterpunkte.

Die Summe der ersten n Zahlen

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$. ✓
  - INDUKTIONSSCHRITT von n auf $n+1$:
    - Wir können die *Induktionsannahme* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ voraussetzen.
    - $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+2) \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$. ✓
- Ein direktes Argument:
  - Betrachte ein Gitter mit n Zeilen und n Spalten: n^2 Gitterpunkte.
  - Wir müssen die Gitterpunkte unterhalb der Hauptdiagonale und auf der Hauptdiagonale zählen.
  - Die Hauptdiagonale besitzt n Gitterpunkte und unterhalb der Hauptdiagonale befindet sich die Hälfte der verbleibenden $n^2 - n$ Gitterpunkte. Also folgt $\sum_{i=1}^{n} i =$

Die Summe der ersten n Zahlen

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und $\frac{0\cdot(0+1)}{2} = 0$. ✓
  - INDUKTIONSSCHRITT von n auf $n+1$:
    - Wir können die *Induktionsannahme* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ voraussetzen.
    - $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{n\cdot(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n\cdot(n+1)+2\cdot(n+1)}{2} = \frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$. ✓
- Ein direktes Argument:
  - Betrachte ein Gitter mit n Zeilen und n Spalten: n^2 Gitterpunkte.
  - Wir müssen die Gitterpunkte unterhalb der Hauptdiagonale und auf der Hauptdiagonale zählen.
  - Die Hauptdiagonale besitzt n Gitterpunkte und unterhalb der Hauptdiagonale befindet sich die Hälfte der verbleibenden $n^2 - n$ Gitterpunkte. Also folgt $\sum_{i=1}^{n} i = n +$

Die Summe der ersten n Zahlen

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$. ✓
  - INDUKTIONSSCHRITT von n auf $n+1$:
    - Wir können die *Induktionsannahme* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ voraussetzen.
    - $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+2) \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$. ✓
- Ein direktes Argument:
  - Betrachte ein Gitter mit n Zeilen und n Spalten: n^2 Gitterpunkte.
  - Wir müssen die Gitterpunkte unterhalb der Hauptdiagonale und auf der Hauptdiagonale zählen.
  - Die Hauptdiagonale besitzt n Gitterpunkte und unterhalb der Hauptdiagonale befindet sich die Hälfte der verbleibenden $n^2 - n$ Gitterpunkte. Also folgt $\sum_{i=1}^{n} i = n + \frac{n^2 - n}{2}$

Die Summe der ersten n Zahlen

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$. ✓
  - INDUKTIONSSCHRITT von n auf $n+1$:
    - Wir können die *Induktionsannahme* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ voraussetzen.
    - $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+2) \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$. ✓

- Ein direktes Argument:
  - Betrachte ein Gitter mit n Zeilen und n Spalten: n^2 Gitterpunkte.
  - Wir müssen die Gitterpunkte unterhalb der Hauptdiagonale und auf der Hauptdiagonale zählen.
  - Die Hauptdiagonale besitzt n Gitterpunkte und unterhalb der Hauptdiagonale befindet sich die Hälfte der verbleibenden $n^2 - n$ Gitterpunkte. Also folgt $\sum_{i=1}^{n} i = n + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$. ✓

Sind quadratisch viele Schritte wirklich notwendig?

- Alles auf eine Karte zu setzen,
  also nur in eine Richtung zu marschieren, ist Unfug.
- Aber können wir etwas mutiger sein,
  als immer nur einen weiteren Schritt zu wagen?

Sind quadratisch viele Schritte wirklich notwendig?

- Alles auf eine Karte zu setzen,
  also nur in eine Richtung zu marschieren, ist Unfug.
- Aber können wir etwas mutiger sein,
  als immer nur einen weiteren Schritt zu wagen?
  - Zum Beispiel, Ein Schritt nach vorn, zwei zurück, vier nach vorn, acht zurück, $\ldots$,
  - Wieviele Schritte brauchen wir diesmal?

Die geometrische Reihe

Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \text{ falls } a \neq 1.$$

Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \text{ falls } a \neq 1.$$

- Mathematische Induktion nach n:

Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \text{ falls } a \neq 1.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$:

Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \text{ falls } a \neq 1.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} a^i = 1$

Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \text{ falls } a \neq 1.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} a^i = 1$ und $\frac{a^{0+1}-1}{a-1} = 1$. ✓

Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \text{ falls } a \neq 1.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} a^i = 1$ und $\frac{a^{0+1}-1}{a-1} = 1$. ✓
  - INDUKTIONSSCHRITT von n auf $n+1$:

Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \text{ falls } a \neq 1.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} a^i = 1$ und $\frac{a^{0+1}-1}{a-1} = 1$. ✓
  - INDUKTIONSSCHRITT von n auf $n + 1$:
    - Wir können die *Induktionsanahme* $\sum_{i=1}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ voraussetzen.

Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \text{ falls } a \neq 1.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} a^i = 1$ und $\frac{a^{0+1}-1}{a-1} = 1$. ✓
  - INDUKTIONSSCHRITT von n auf $n+1$:
    - ⋆ Wir können die *Induktionsanahme* $\sum_{i=1}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ voraussetzen. Dann ist
    - ⋆ $\sum_{i=1}^{n+1} a^i$

Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \text{ falls } a \neq 1.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} a^i = 1$ und $\frac{a^{0+1}-1}{a-1} = 1$. ✓
  - INDUKTIONSSCHRITT von n auf $n+1$:
    - ⋆ Wir können die *Induktionsanahme* $\sum_{i=1}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ voraussetzen. Dann ist
    - ⋆ $\sum_{i=1}^{n+1} a^i = \sum_{i=1}^{n} a^i + a^{n+1}$

Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \text{ falls } a \neq 1.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} a^i = 1$ und $\frac{a^{0+1}-1}{a-1} = 1$. ✓
  - INDUKTIONSSCHRITT von n auf $n+1$:
    - Wir können die *Induktionsanahme* $\sum_{i=1}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ voraussetzen. Dann ist
    - $\sum_{i=1}^{n+1} a^i = \sum_{i=1}^{n} a^i + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1}$

Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \text{ falls } a \neq 1.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} a^i = 1$ und $\frac{a^{0+1}-1}{a-1} = 1$. ✓
  - INDUKTIONSSCHRITT von n auf $n+1$:
    - ⋆ Wir können die *Induktionsanahme* $\sum_{i=1}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ voraussetzen. Dann ist
    - ⋆ $\sum_{i=1}^{n+1} a^i = \sum_{i=1}^{n} a^i + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1+a^{n+2}-a^{n+1}}{a-1}$

Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \text{ falls } a \neq 1.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} a^i = 1$ und $\frac{a^{0+1}-1}{a-1} = 1$. ✓
  - INDUKTIONSSCHRITT von n auf $n+1$:
    - ⋆ Wir können die *Induktionsanahme* $\sum_{i=1}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ voraussetzen. Dann ist
    - ⋆ $\sum_{i=1}^{n+1} a^i = \sum_{i=1}^{n} a^i + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1+a^{n+2}-a^{n+1}}{a-1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$ ✓

Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \text{ falls } a \neq 1.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} a^i = 1$ und $\frac{a^{0+1}-1}{a-1} = 1$. ✓
  - INDUKTIONSSCHRITT von n auf $n+1$:
    - ⋆ Wir können die *Induktionsanahme* $\sum_{i=1}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ voraussetzen. Dann ist
    - ⋆ $\sum_{i=1}^{n+1} a^i = \sum_{i=1}^{n} a^i + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1+a^{n+2}-a^{n+1}}{a-1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$ ✓
- Ein direktes Argument:

Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \text{ falls } a \neq 1.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} a^i = 1$ und $\frac{a^{0+1}-1}{a-1} = 1$. ✓
  - INDUKTIONSSCHRITT von n auf $n + 1$:
    - Wir können die *Induktionsanahme* $\sum_{i=1}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ voraussetzen. Dann ist
    - $\sum_{i=1}^{n+1} a^i = \sum_{i=1}^{n} a^i + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1+a^{n+2}-a^{n+1}}{a-1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$ ✓
- Ein direktes Argument:

$$(a-1) \cdot \sum_{i=0}^{n} a^i \quad = \quad a \cdot \sum_{i=0}^{n} a^i - \sum_{i=0}^{n} a^i$$

Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \text{ falls } a \neq 1.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} a^i = 1$ und $\frac{a^{0+1}-1}{a-1} = 1$. ✓
  - INDUKTIONSSCHRITT von n auf $n + 1$:
    - ⋆ Wir können die *Induktionsanahme* $\sum_{i=1}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ voraussetzen. Dann ist
    - ⋆ $\sum_{i=1}^{n+1} a^i = \sum_{i=1}^{n} a^i + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1+a^{n+2}-a^{n+1}}{a-1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$ ✓
- Ein direktes Argument:

$$\begin{aligned}(a-1) \cdot \sum_{i=0}^{n} a^i &= a \cdot \sum_{i=0}^{n} a^i - \sum_{i=0}^{n} a^i \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} a^i - \sum_{i=0}^{n} a^i =\end{aligned}$$

Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \text{ falls } a \neq 1.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n=0$: $\sum_{i=1}^{0} a^i = 1$ und $\frac{a^{0+1}-1}{a-1} = 1$. ✓
  - INDUKTIONSSCHRITT von n auf $n+1$:
    - Wir können die *Induktionsanahme* $\sum_{i=1}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ voraussetzen. Dann ist
    - $\sum_{i=1}^{n+1} a^i = \sum_{i=1}^{n} a^i + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1+a^{n+2}-a^{n+1}}{a-1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$ ✓
- Ein direktes Argument:

$$\begin{aligned}(a-1)\cdot\sum_{i=0}^{n} a^i &= a\cdot\sum_{i=0}^{n} a^i - \sum_{i=0}^{n} a^i \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} a^i - \sum_{i=0}^{n} a^i = a^{n+1} - a^0\end{aligned}$$

Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \text{ falls } a \neq 1.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} a^i = 1$ und $\frac{a^{0+1}-1}{a-1} = 1$. ✓
  - INDUKTIONSSCHRITT von n auf $n+1$:
    - ⋆ Wir können die *Induktionsanahme* $\sum_{i=1}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ voraussetzen. Dann ist
    - ⋆ $\sum_{i=1}^{n+1} a^i = \sum_{i=1}^{n} a^i + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1+a^{n+2}-a^{n+1}}{a-1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$ ✓
- Ein direktes Argument:

$$\begin{aligned}(a-1) \cdot \textstyle\sum_{i=0}^{n} a^i &= a \cdot \textstyle\sum_{i=0}^{n} a^i - \sum_{i=0}^{n} a^i \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n+1} a^i - \sum_{i=0}^{n} a^i = a^{n+1} - a^0 = a^{n+1} - 1\end{aligned}$$

und das war zu zeigen. ✓

Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \text{ falls } a \neq 1.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} a^i = 1$ und $\frac{a^{0+1}-1}{a-1} = 1$. ✓
  - INDUKTIONSSCHRITT von n auf $n+1$:
    - Wir können die *Induktionsanahme* $\sum_{i=1}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ voraussetzen. Dann ist
    - $\sum_{i=1}^{n+1} a^i = \sum_{i=1}^{n} a^i + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1+a^{n+2}-a^{n+1}}{a-1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$ ✓
- Ein direktes Argument:

$$\begin{aligned}(a-1)\cdot\sum_{i=0}^{n} a^i &= a\cdot\sum_{i=0}^{n} a^i - \sum_{i=0}^{n} a^i\\ &= \sum_{i=1}^{n+1} a^i - \sum_{i=0}^{n} a^i = a^{n+1} - a^0 = a^{n+1}-1\end{aligned}$$

und das war zu zeigen. ✓

Der stockdunkle Gang: Vorher quadratisch viele Schritte, jetzt

Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \text{ falls } a \neq 1.$$

- Mathematische Induktion nach n:
  - INDUKTIONSBASIS für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} a^i = 1$ und $\frac{a^{0+1}-1}{a-1} = 1$. ✓
  - INDUKTIONSSCHRITT von n auf $n + 1$:
    - ⋆ Wir können die *Induktionsanahme* $\sum_{i=1}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ voraussetzen. Dann ist
    - ⋆ $\sum_{i=1}^{n+1} a^i = \sum_{i=1}^{n} a^i + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1+a^{n+2}-a^{n+1}}{a-1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$ ✓
- Ein direktes Argument:

$$\begin{aligned}(a-1) \cdot \sum_{i=0}^{n} a^i &= a \cdot \sum_{i=0}^{n} a^i - \sum_{i=0}^{n} a^i \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} a^i - \sum_{i=0}^{n} a^i = a^{n+1} - a^0 = a^{n+1} - 1\end{aligned}$$

und das war zu zeigen. ✓

Der stockdunkle Gang: Vorher quadratisch viele Schritte, jetzt linear viele!

Rekursiv definierte Funktionen

Rekursive Definitionen

Wir können das Induktionsprinzip auch benutzen, um Funktionen

$$f : \mathbb{N} \to M$$

für eine beliebige Menge M zu definieren. Die Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ sei beliebig.

(1) **Rekursionsanfang:** Definiere $f(n_0)$.

Rekursive Definitionen

Wir können das Induktionsprinzip auch benutzen, um Funktionen

$$f : \mathbb{N} \to M$$

für eine beliebige Menge M zu definieren. Die Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ sei beliebig.

(1) **Rekursionsanfang:** Definiere $f(n_0)$.

(2) **Rekursionsschritt:** Definiere $f(n+1)$ unter Verwendung der Werte $f(n_0), f(n_0+1), \ldots, f(n)$.

Die Türme von Hanoi

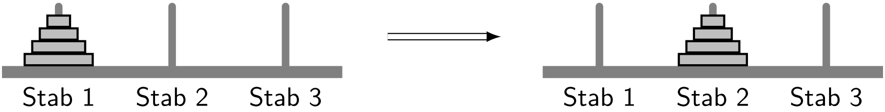
- **Die Anfangskonfiguration**:
  - Wir haben drei Stäbe 1, 2 und 3.
  - Ursprünglich besitzt Stab 1 N Ringe, wobei die Ringe in absteigender Größe auf dem Stab aufgereiht sind:
    - Der größte Ring von Stab 1 ist also der unterste Ring.
  - Die Stäbe 2 und 3 sind zu Anfang leer.

Die Türme von Hanoi

- **Die Anfangskonfiguration**:
  - Wir haben drei Stäbe 1, 2 und 3.
  - Ursprünglich besitzt Stab 1 N Ringe, wobei die Ringe in absteigender Größe auf dem Stab aufgereiht sind:
    - Der größte Ring von Stab 1 ist also der unterste Ring.
  - Die Stäbe 2 und 3 sind zu Anfang leer.
- **Die Züge**
  - Bewege einen zuoberst liegenden Ring von einem Stab zu einem anderen.
  - Der Zug ist nur dann erlaubt, wenn der Ring auf einen größeren Ring gelegt wird oder wenn der Stab leer ist.

Die Türme von Hanoi

- **Die Anfangskonfiguration**:
  - Wir haben drei Stäbe 1, 2 und 3.
  - Ursprünglich besitzt Stab 1 N Ringe, wobei die Ringe in absteigender Größe auf dem Stab aufgereiht sind:
    - Der größte Ring von Stab 1 ist also der unterste Ring.
  - Die Stäbe 2 und 3 sind zu Anfang leer.
- **Die Züge**
  - Bewege einen zuoberst liegenden Ring von einem Stab zu einem anderen.
  - Der Zug ist nur dann erlaubt, wenn der Ring auf einen größeren Ring gelegt wird oder wenn der Stab leer ist.
- **Die Zielkonfiguration**:
  - Alle Ringe müssen nach Stab 2 bewegt werden.



Ein rekursives Programm

```
void Hanoi( int N, int stab1, int stab2, int stab3)
```

Ein rekursives Programm

```
void Hanoi( int N, int stab1, int stab2, int stab3)
// Annahme: Alle Ringe auf Stab „stab1“ passen auf die Stäbe
// „stab2“ und „stab3“. Das Programm soll die obersten N Ringe
// von Stab „stab1“ auf Stab „stab2“ bewegen.
{if (N==1)
    bewege einen Ring von Stab stab1 nach Stab stab2;
else {
    Hanoi(N-1,stab1,stab3,stab2);
    bewege einen Ring von Stab stab1 nach Stab stab2;
    Hanoi(N-1,stab3,stab2,stab1); }}
```

Ein rekursives Programm

```
void Hanoi( int N, int stab1, int stab2, int stab3)
// Annahme: Alle Ringe auf Stab „stab1“ passen auf die Stäbe
// „stab2“ und „stab3“. Das Programm soll die obersten N Ringe
// von Stab „stab1“ auf Stab „stab2“ bewegen.
{if (N==1)
    bewege einen Ring von Stab stab1 nach Stab stab2;
else {
    Hanoi(N-1,stab1,stab3,stab2);
    bewege einen Ring von Stab stab1 nach Stab stab2;
    Hanoi(N-1,stab3,stab2,stab1); }}
```

- Wie zeigt man, dass `Hanoi` korrekt ist?

Ein rekursives Programm

```
void Hanoi( int N, int stab1, int stab2, int stab3)
// Annahme: Alle Ringe auf Stab „stab1“ passen auf die Stäbe
// „stab2“ und „stab3“. Das Programm soll die obersten N Ringe
// von Stab „stab1“ auf Stab „stab2“ bewegen.
{if (N==1)
    bewege einen Ring von Stab stab1 nach Stab stab2;
else {
    Hanoi(N-1,stab1,stab3,stab2);
    bewege einen Ring von Stab stab1 nach Stab stab2;
    Hanoi(N-1,stab3,stab2,stab1); }}
```

- Wie zeigt man, dass `Hanoi` korrekt ist?
- Sei **T(N)** die Anzahl der Ringbewegungen nach Aufruf des Programms Hanoi(N,stab1,stab2,stab3): Wie bestimmt man **T(N)**?

Die Anzahl der Ringbewegungen

Bestimme

$$T(N) \quad = \quad \text{die Anzahl der Ringbewegungen nach Aufruf des Programms Hanoi(N,*,*,*).}$$

Die Anzahl der Ringbewegungen

Bestimme

$$T(N) \quad = \quad \text{die Anzahl der Ringbewegungen nach Aufruf des Programms Hanoi(N,*,*,*).}$$

- Wir geben eine rekursive Definition an:
  - **Rekursionsanfang:** Es ist $T(1) = 1$ und
  - **Rekursionsschritt**: Es ist $T(N) = 2 \cdot T(N-1) + 1$.

Die Anzahl der Ringbewegungen

Bestimme

$$T(N) \quad = \quad \text{die Anzahl der Ringbewegungen nach Aufruf des Programms Hanoi(N,*,*,*).}$$

- Wir geben eine rekursive Definition an:
  - **Rekursionsanfang:** Es ist $T(1) = 1$ und
  - **Rekursionsschritt**: Es ist $T(N) = 2 \cdot T(N-1) + 1$.
- Und wie sieht ein expliziter Ausdruck für $T(N)$ aus? Siehe Tafel.

Die Weizenkornlegende (1/3)

Der Brahmane Sissa ibn Dahir (auch: Sessa) lebte angeblich im dritten oder vierten Jahrhundert n. Chr. in Indien.

Die Weizenkornlegende (1/3)

Der Brahmane Sissa ibn Dahir (auch: Sessa) lebte angeblich im dritten oder vierten Jahrhundert n. Chr. in Indien.

- Der indische Herrscher Shihram tyrannisierte damals seine Untertanen und stürzte sein Land in Not und Elend.
- Sissa erfand das Schachspiel (bzw. seine indische Urform Tschaturanga), um die Aufmerksamkeit von Shihram auf seine Fehler zu lenken, ohne ihn zu erzürnen:

  Der König als wichtigste Figur kann ohne Hilfe
  der anderen Figuren nichts ausrichten.

- Als Dank für die anschauliche Lehre von Lebensweisheit und zugleich Unterhaltung, gewährte Shihram dem Brahmanen einen freien Wunsch.

Die Weizenkornlegende (1/3)

Der Brahmane Sissa ibn Dahir (auch: Sessa) lebte angeblich im dritten oder vierten Jahrhundert n. Chr. in Indien.

- Der indische Herrscher Shihram tyrannisierte damals seine Untertanen und stürzte sein Land in Not und Elend.
- Sissa erfand das Schachspiel (bzw. seine indische Urform Tschaturanga), um die Aufmerksamkeit von Shihram auf seine Fehler zu lenken, ohne ihn zu erzürnen:

  Der König als wichtigste Figur kann ohne Hilfe
  der anderen Figuren nichts ausrichten.

- Als Dank für die anschauliche Lehre von Lebensweisheit und zugleich Unterhaltung, gewährte Shihram dem Brahmanen einen freien Wunsch.

Sissa wünschte sich Weizenkörner:

- Auf das erste Feld eines Schachbretts wollte er ein Korn,
- auf das zweite Feld das doppelte, also zwei,

Die Weizenkornlegende (1/3)

Der Brahmane Sissa ibn Dahir (auch: Sessa) lebte angeblich im dritten oder vierten Jahrhundert n. Chr. in Indien.

- Der indische Herrscher Shihram tyrannisierte damals seine Untertanen und stürzte sein Land in Not und Elend.
- Sissa erfand das Schachspiel (bzw. seine indische Urform Tschaturanga), um die Aufmerksamkeit von Shihram auf seine Fehler zu lenken, ohne ihn zu erzürnen:

  Der König als wichtigste Figur kann ohne Hilfe der anderen Figuren nichts ausrichten.

- Als Dank für die anschauliche Lehre von Lebensweisheit und zugleich Unterhaltung, gewährte Shihram dem Brahmanen einen freien Wunsch.

Sissa wünschte sich Weizenkörner:

- Auf das erste Feld eines Schachbretts wollte er ein Korn,
- auf das zweite Feld das doppelte, also zwei,
- auf das dritte wiederum die doppelte Menge, also vier und so weiter.

Die Weizenkornlegende (2/3)

Shihram lachte und war gleichzeitig erbost
über die vermeintliche Bescheidenheit des Brahmanen.

Shihram lachte und war gleichzeitig erbost
über die vermeintliche Bescheidenheit des Brahmanen.

- Als sich Shihram einige Tage später erkundigte, ob Sissa seine Belohnung in Empfang genommen habe, hatten die Rechenmeister die Menge der Weizenkörner noch nicht berechnet.

Shihram lachte und war gleichzeitig erbost
über die vermeintliche Bescheidenheit des Brahmanen.

- Als sich Shihram einige Tage später erkundigte, ob Sissa seine Belohnung in Empfang genommen habe, hatten die Rechenmeister die Menge der Weizenkörner noch nicht berechnet.
- Der Vorsteher der Kornkammer meldete nach mehreren Tagen ununterbrochener Arbeit, dass er diese Menge Getreidekörner im ganzen Reich nicht aufbringen könne.
  - Auf allen Feldern eines Schachbretts zusammen wären es 18.446.744.073.709.551.615 ($\approx$ 18,45 Trillionen) Weizenkörner.

Shihram lachte und war gleichzeitig erbost
über die vermeintliche Bescheidenheit des Brahmanen.

- Als sich Shihram einige Tage später erkundigte, ob Sissa seine Belohnung in Empfang genommen habe, hatten die Rechenmeister die Menge der Weizenkörner noch nicht berechnet.
- Der Vorsteher der Kornkammer meldete nach mehreren Tagen ununterbrochener Arbeit, dass er diese Menge Getreidekörner im ganzen Reich nicht aufbringen könne.
  - Auf allen Feldern eines Schachbretts zusammen wären es 18.446.744.073.709.551.615 ($\approx$ 18,45 Trillionen) Weizenkörner.
- Nun stellte Shihram sich die Frage, wie das Versprechen eingelöst werden könne.
  - Der Rechenmeister half dem Herrscher aus der Verlegenheit, indem er ihm empfahl,

Shihram lachte und war gleichzeitig erbost
über die vermeintliche Bescheidenheit des Brahmanen.

- Als sich Shihram einige Tage später erkundigte, ob Sissa seine Belohnung in Empfang genommen habe, hatten die Rechenmeister die Menge der Weizenkörner noch nicht berechnet.
- Der Vorsteher der Kornkammer meldete nach mehreren Tagen ununterbrochener Arbeit, dass er diese Menge Getreidekörner im ganzen Reich nicht aufbringen könne.
  - Auf allen Feldern eines Schachbretts zusammen wären es 18.446.744.073.709.551.615 ($\approx$ 18,45 Trillionen) Weizenkörner.
- Nun stellte Shihram sich die Frage, wie das Versprechen eingelöst werden könne.
  - Der Rechenmeister half dem Herrscher aus der Verlegenheit, indem er ihm empfahl, er solle Sissa ibn Dahir ganz einfach das Getreide Korn für Korn zählen lassen.

Statt auf einem Schachbrett betrachten wir das Wachstum auf einem unbeschränkt langen, ein-dimensionalem Brett.

Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{N}_{\geqslant 1} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(n) = \text{Anzahl der Weizenkörner auf dem } n\text{'ten Feld}$$

- Wir geben eine rekursive Definition von f.
  - **Rekursionsanfang**: Es ist $f(1) =$

Die Weizenkornlegende (3/3)

Statt auf einem Schachbrett betrachten wir das Wachstum auf einem unbeschränkt langen, ein-dimensionalem Brett.

Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{N}_{\geqslant 1} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(n) = \text{Anzahl der Weizenkörner auf dem } n\text{'ten Feld}$$

- Wir geben eine rekursive Definition von f.
  - **Rekursionsanfang**: Es ist $f(1) = 1$ und
  - **Rekursionsschritt**: $f(n+1) =$

Die Weizenkornlegende (3/3)

Statt auf einem Schachbrett betrachten wir das Wachstum auf einem unbeschränkt langen, ein-dimensionalem Brett.

Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{N}_{\geqslant 1} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(n) = \text{Anzahl der Weizenkörner auf dem } n\text{'ten Feld}$$

- Wir geben eine rekursive Definition von f.
  - **Rekursionsanfang**: Es ist $f(1) = 1$ und
  - **Rekursionsschritt**: $f(n+1) = 2 \cdot f(n)$.

Die Weizenkornlegende (3/3)

Statt auf einem Schachbrett betrachten wir das Wachstum auf einem unbeschränkt langen, ein-dimensionalem Brett.

Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{N}_{\geqslant 1} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(n) = \text{Anzahl der Weizenkörner auf dem } n\text{'ten Feld}$$

- Wir geben eine rekursive Definition von f.
  - **Rekursionsanfang**: Es ist $f(1) = 1$ und
  - **Rekursionsschritt**: $f(n+1) = 2 \cdot f(n)$.
- Wir können einen einfachen Ausdruck für $f(n)$ finden:
  - Die Anzahl der Weizenkörner am n'ten Tag erhalten wir durch $(n-1)$-maliges Verdoppeln.
  - Es „sollte“ $f(n) = 2^{n-1}$ gelten!

Die Weizenkornlegende (3/3)

Statt auf einem Schachbrett betrachten wir das Wachstum auf einem unbeschränkt langen, ein-dimensionalem Brett.

Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{N}_{\geqslant 1} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(n) = \text{Anzahl der Weizenkörner auf dem } n\text{'ten Feld}$$

- Wir geben eine rekursive Definition von f.
  - **Rekursionsanfang**: Es ist $f(1) = 1$ und
  - **Rekursionsschritt**: $f(n+1) = 2 \cdot f(n)$.
- Wir können einen einfachen Ausdruck für $f(n)$ finden:
  - Die Anzahl der Weizenkörner am n'ten Tag erhalten wir durch $(n-1)$-maliges Verdoppeln.
  - Es „sollte“ $f(n) = 2^{n-1}$ gelten!
- Wir verifizieren „$f(n) = 2^{n-1}$“ durch vollständige Induktion.
  - **Induktionsanfang**: ✓

Statt auf einem Schachbrett betrachten wir das Wachstum auf einem unbeschränkt langen, ein-dimensionalem Brett.

Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{N}_{\geqslant 1} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(n) = \text{Anzahl der Weizenkörner auf dem } n\text{'ten Feld}$$

- Wir geben eine rekursive Definition von f.
  - **Rekursionsanfang**: Es ist $f(1) = 1$ und
  - **Rekursionsschritt**: $f(n+1) = 2 \cdot f(n)$.
- Wir können einen einfachen Ausdruck für $f(n)$ finden:
  - Die Anzahl der Weizenkörner am n'ten Tag erhalten wir durch $(n-1)$-maliges Verdoppeln.
  - Es „sollte“ $f(n) = 2^{n-1}$ gelten!
- Wir verifizieren „$f(n) = 2^{n-1}$“ durch vollständige Induktion.
  - **Induktionsanfang**: ✓
  - **Induktionsschritt**: $f(n+1) = 2 \cdot f(n)$

Die Weizenkornlegende (3/3)

Statt auf einem Schachbrett betrachten wir das Wachstum auf einem unbeschränkt langen, ein-dimensionalem Brett.

Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{N}_{\geqslant 1} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(n) = \text{Anzahl der Weizenkörner auf dem } n\text{'ten Feld}$$

- Wir geben eine rekursive Definition von f.
  - **Rekursionsanfang**: Es ist $f(1) = 1$ und
  - **Rekursionsschritt**: $f(n+1) = 2 \cdot f(n)$.
- Wir können einen einfachen Ausdruck für $f(n)$ finden:
  - Die Anzahl der Weizenkörner am n'ten Tag erhalten wir durch $(n-1)$-maliges Verdoppeln.
  - Es „sollte“ $f(n) = 2^{n-1}$ gelten!
- Wir verifizieren „$f(n) = 2^{n-1}$“ durch vollständige Induktion.
  - **Induktionsanfang**: ✓
  - **Induktionsschritt**: $f(n+1) = 2 \cdot f(n) \stackrel{\text{Induktionsannahme}}{=} 2 \cdot 2^{n-1}$

Statt auf einem Schachbrett betrachten wir das Wachstum auf einem unbeschränkt langen, ein-dimensionalem Brett.

Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{N}_{\geqslant 1} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(n) = \text{Anzahl der Weizenkörner auf dem } n\text{'ten Feld}$$

- Wir geben eine rekursive Definition von f.
  - **Rekursionsanfang**: Es ist $f(1) = 1$ und
  - **Rekursionsschritt**: $f(n+1) = 2 \cdot f(n)$.
- Wir können einen einfachen Ausdruck für $f(n)$ finden:
  - Die Anzahl der Weizenkörner am n'ten Tag erhalten wir durch $(n-1)$-maliges Verdoppeln.
  - Es „sollte“ $f(n) = 2^{n-1}$ gelten!
- Wir verifizieren „$f(n) = 2^{n-1}$“ durch vollständige Induktion.
  - **Induktionsanfang**: ✓
  - **Induktionsschritt**: $f(n+1) = 2 \cdot f(n) \overset{\text{Induktionsannahme}}{=} 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$. ✓

Die Anzahl der Sissa zustehenden Weizenkörner ist $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{63} = 2^{64} - 1$.

Karnickel (1/2)

Ein Bauer züchtet Kaninchen. Jedes weibliche Kaninchen bringt im Alter von zwei Monaten ein weibliches Kaninchen zur Welt und danach jeden Monat ein weiteres.

Karnickel (1/2)

Ein Bauer züchtet Kaninchen. Jedes weibliche Kaninchen bringt im Alter von zwei Monaten ein weibliches Kaninchen zur Welt und danach jeden Monat ein weiteres.

Wie groß ist die Anzahl

$$\mathbf{fib(n)}$$

der weiblichen Kaninchen, die der Bauer am Ende des n-ten Monats hat, wenn er mit einem neu geborenen weiblichen Kaninchen im ersten Monat startet?

Karnickel (1/2)

Ein Bauer züchtet Kaninchen. Jedes weibliche Kaninchen bringt im Alter von zwei Monaten ein weibliches Kaninchen zur Welt und danach jeden Monat ein weiteres.

Wie groß ist die Anzahl

$$\mathbf{fib(n)}$$

der weiblichen Kaninchen, die der Bauer am Ende des n-ten Monats hat, wenn er mit einem neu geborenen weiblichen Kaninchen im ersten Monat startet?

Antwort: $\text{fib}(n)$ ist rekursiv wie folgt definiert:

- **Rekursionsanfang**: $\text{fib}(1) \ :=$

Karnickel (1/2)

Ein Bauer züchtet Kaninchen. Jedes weibliche Kaninchen bringt im Alter von zwei Monaten ein weibliches Kaninchen zur Welt und danach jeden Monat ein weiteres.

Wie groß ist die Anzahl

$$\mathbf{fib(n)}$$

der weiblichen Kaninchen, die der Bauer am Ende des n-ten Monats hat, wenn er mit einem neu geborenen weiblichen Kaninchen im ersten Monat startet?

Antwort: $\mathrm{fib}(n)$ ist rekursiv wie folgt definiert:

- **Rekursionsanfang**: $\mathrm{fib}(1) := 1$ und $\mathrm{fib}(2) :=$

Karnickel (1/2)

Ein Bauer züchtet Kaninchen. Jedes weibliche Kaninchen bringt im Alter von zwei Monaten ein weibliches Kaninchen zur Welt und danach jeden Monat ein weiteres.

Wie groß ist die Anzahl

$$\mathbf{fib}(\mathbf{n})$$

der weiblichen Kaninchen, die der Bauer am Ende des n-ten Monats hat, wenn er mit einem neu geborenen weiblichen Kaninchen im ersten Monat startet?

Antwort: $\text{fib}(n)$ ist rekursiv wie folgt definiert:

- **Rekursionsanfang**: $\text{fib}(1) \; := \; 1$ und $\text{fib}(2) \; := \; 1$,
- **Rekursionsschritt:** $\text{fib}(n+1) \; :=$

Ein Bauer züchtet Kaninchen. Jedes weibliche Kaninchen bringt im Alter von zwei Monaten ein weibliches Kaninchen zur Welt und danach jeden Monat ein weiteres.

Wie groß ist die Anzahl

$$\mathbf{fib}(\mathbf{n})$$

der weiblichen Kaninchen, die der Bauer am Ende des n-ten Monats hat, wenn er mit einem neu geborenen weiblichen Kaninchen im ersten Monat startet?

Antwort: $\text{fib}(n)$ ist rekursiv wie folgt definiert:

- **Rekursionsanfang**: $\text{fib}(1) \ := \ 1$ und $\text{fib}(2) \ := \ 1$,
- **Rekursionsschritt:** $\text{fib}(n+1) \ := \ \text{fib}(n) +$

Karnickel (1/2)

Ein Bauer züchtet Kaninchen. Jedes weibliche Kaninchen bringt im Alter von zwei Monaten ein weibliches Kaninchen zur Welt und danach jeden Monat ein weiteres.

Wie groß ist die Anzahl

$$\mathbf{fib(n)}$$

der weiblichen Kaninchen, die der Bauer am Ende des n-ten Monats hat, wenn er mit einem neu geborenen weiblichen Kaninchen im ersten Monat startet?

Antwort: $\text{fib}(n)$ ist rekursiv wie folgt definiert:

- **Rekursionsanfang**: $\text{fib}(1) \ := \ 1$ und $\text{fib}(2) \ := \ 1$,
- **Rekursionsschritt:** $\text{fib}(n+1) \ := \ \text{fib}(n) + \text{fib}(n-1)$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$.

Die Funktion fib wird auch **Fibonacci-Folge**[a] genannt, die Zahl $\text{fib}(n)$ heißt auch n-te Fibonacci-Zahl.

[a] Zu Ehren von Leonardo Fibonacci (13. Jh.), einem italienischen Mathematiker

Zur Erinnerung: Es ist

- $\text{fib}(1) := 1$ und $\text{fib}(2) := 1$ und
- $\text{fib}(n+1) := \text{fib}(n) + \text{fib}(n-1)$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$.

Somit gilt:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\text{fib}(n)$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Zur Erinnerung: Es ist

- $\mathrm{fib}(1) \;:=\; 1$ und $\mathrm{fib}(2) \;:=\; 1$ und
- $\mathrm{fib}(n+1) \;:=\; \mathrm{fib}(n) + \mathrm{fib}(n-1)$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$.

Somit gilt:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathrm{fib}(n)$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Wie stark wächst die Folge $\mathrm{fib}(n)$? Wir vergleichen $\mathrm{fib}(n)$ mit 2^n.

- Es sieht so aus als ob

Zur Erinnerung: Es ist

- $\mathrm{fib}(1) := 1$ und $\mathrm{fib}(2) := 1$ und
- $\mathrm{fib}(n+1) := \mathrm{fib}(n) + \mathrm{fib}(n-1)$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$.

Somit gilt:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathrm{fib}(n)$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Wie stark wächst die Folge $\mathrm{fib}(n)$? Wir vergleichen $\mathrm{fib}(n)$ mit 2^n.

- Es sieht so aus als ob

$$2^{n/2} \leqslant \mathrm{fib}(n) \leqslant 2^n$$

  für $n \geqslant 6$ gilt.
- Und wie zeigt man das?