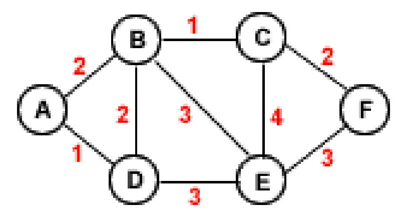
Effiziente Algorithmen

Hartmut Klauck
Universität Frankfurt
SS 06
6.6.



Flussnetzwerke

- Ein Flussnetzwerk ist ein gerichteter Graph $G=(V,E)$ mit reellen nichtnegativen Kantengewichten $C(u,v)$, die auch Kapazitäten heissen.
- Zusätzlich gibt es einen Quellknoten s und einen Zielknoten t
- Wir nehmen an, für alle Knoten v in G gibt es Pfade s nach v und v nach t
- Ein Fluss in G ist eine Abbildung f von $V\times V$ auf die reellen Zahlen mit folgenden Eigenschaften:
  - Für alle u,v: $f(u,v)\leq C(u,v)$ [Kapazitätsbeschränkung]
  - Für alle u,v: $f(u,v)=-f(v,u)$ [(Schief) Symmetrie]
  - Für alle $u\neq s,t$: $\sum_v f(u,v)=0$ [Flusserhaltung]
- Der Wert eines Flusses ist $W(f)=\sum_v f(s,v)$
- Das Problem das maximalen Flusses ist es, den Wert eines grösstmöglichen Flusses für G,C,s,t zu finden

Bemerkungen

- Mehrere Quellen und Senken können einfach mit Hilfe von Zusatzkanten modelliert werden.
- Wenn u und v nicht miteinander verbunden sind, so setzen wir $C(u,v)=0$
- Notation: Für Knotenmengen X,Y sei $f(X,Y)=\sum_{x\in X,\, y\in Y} f(x,y)$
- analog setze $C(X,Y)$

Eine Beobachtung (14.1)

- $N=(G,C,s,t)$ sei ein Flussnetzwerk, f ein Fluss
  - Für alle $X \subseteq V$ gilt:
    $f(X,X)=0$
  - Für alle $X,Y \subseteq V$ gilt:
    $f(X,Y)=-f(Y,X)$
  - Für alle X,Y,Z mit $X \cap Y=\emptyset$ gilt
    $f(X \cup Y,Z)=f(X,Z)+f(Y,Z)$

Die Ford Fulkerson Methode

- Wir starten mit $f(u,v)=0$ für alle Paare u,v
- Wir finden dann augmentierende Pfade, d.h. Pfade in G, entlang denen f vergrössert werden kann
- Dies wird so lange wiederholt, bis es keinen augmentierenden Pfad mehr gibt
- f ist nun maximal

Augmentierende Pfade

- Mit der Festlegung $f(u,v)=0$ für nicht vorhandene Kanten kann der Graph als vollständig angenommen werden
- Wir betrachten einfache Pfade von s nach t
- Wenn $C(u,v)-f(u,v)>0$ für alle Kanten auf dem Pfad, so heisst der Pfad augmentierend

Residuale Netzwerke

- Gegeben seien ein Flussnetzwerk G,C,s,t, sowie ein Fluss f
- Wir „entfernen“ f, um das Residualnetzwerk zu erhalten
- Formal: Setze $C_f(u,v)=C(u,v)-f(u,v)$
- Nach Definition erhalten wir so wieder ein Flussnetzwerk
- Achtung: Kanten mit Kapazität 0 können nun positive Kapazität erhalten

Residuale Netzwerke

- **Lemma:**
  - Sei $N=(G,C,s,t)$ ein Flussnetzwerk, und f ein Fluss.
  - Sei $N_f=(G,C_f,s,t)$ das residuale Netzwerk
  - Sei f' ein Fluss in N_f
  - $f+f'$ sei definiert durch $(f+f')(u,v)=f(u,v)+f'(u,v)$
  - Dann ist $f+f'$ ein Fluss in N mit Wert $W(f+f')=W(f)+W(f')$

Beweis:

- Es gilt $(f+f')(u,v)=f(u,v)+f'(u,v)$
- Damit ist der Aussage über $W(f+f')$ trivial
- Wir müssen nur prüfen, ob $f+f'$ ein zulässiger Fluss ist
  - Symmetrie: $(f+f')(u,v)=f(u,v)+f'(u,v)$ $=-f(v,u)-f'(v,u)=-(f+f')(v,u)$
  - Kapazitäten: $(f+f')(u,v)=f(u,v)+f'(u,v)\leq$ $f(u,v)+C_f(u,v)\leq f(u,v)+C(u,v)-f(u,v)=C(u,f)$
  - Flusserhaltung: $\sum_v (f+f')(u,v)$ $=\sum_v f(u,v)+\sum_v f'(u,v) =0+0=0$

Augmentierende Pfade

- Gegeben ein Flussnetzwerk N und einen Fluss f
- Wir bestimmen das residuale Netzwerk N_f
- Für einen Pfad p von s nach t sei die Restkapazität durch $C_f(p)=\min C_f(u,v)$: (u,v) auf p gegeben
- Jetzt suchen wir einen augmentierenden Pfad,
  - d.h. einen Pfad s nach t mit $C_f(p)>0$
- Idee: entferne Kanten mit Kapazität 0, suche einen Pfad mit Breitensuche

Augmentierende Pfade

- Sei p ein augmentierender Pfad
- Setze $f_p(u,v)$=
  - $C_f(p)$ wenn u,v auf p
  - $-C_f(p)$, wenn v,u auf p
  - 0 sonst
- Behauptung: dann ist f_p ein Fluss im residualen Netzwerk
- Insbesondere ist $f+f_p$ ein Fluss mit Wert $W(f)+W(f_p)$ in N
- Beweis:
  - Einfache Prüfung der Bedingungen

Ford Fulkerson

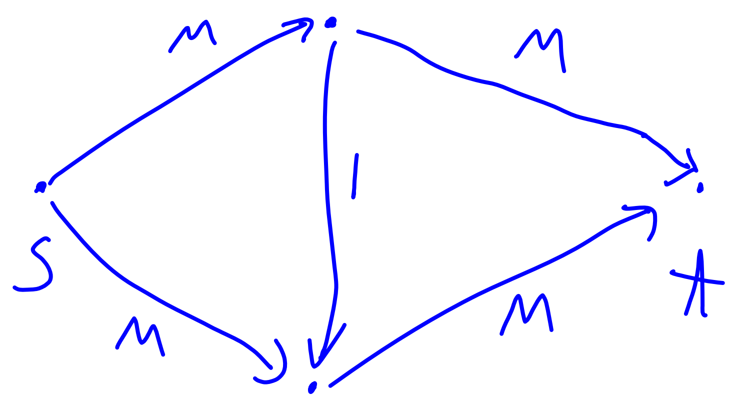
1. Eingabe Flussnetzwerk $N=(G,C,s,t)$
2. Setze $f(u,v)=0$ für alle Paare u,v
3. Solange es einen augmentierenden Pfad p in N_f gibt:
   1. Bestimme $C_f(p)$
   2. Für jede Kante u,v auf p:
      1. setze $f(u,v):=f(u,v)+C_f(p)$
      2. setze $f(v,u):=-f(u,v)$
4. Gib f aus

Laufzeit

- Die Berechnung der augmentierenden Pfade gelingt in Zeit $O(m+n)$ mit Breitensuche
- Die Anzahl der Iterationen ist ausschlaggebend
- Wenn augmentierenden Pfade schlecht gewählt werden, kann es sein, dass Ford Fulkerson (bei irrationalen Gewichten) nicht terminiert
- Weiterhin kann es bei schlechter Wahl der augmentierenden Pfade und integer-Kantengewichten sein, dass die Laufzeit $\Theta(W(f)\ m)$ beträgt für den maximalen Fluss f
  - $O(W(f)\ m)$ gilt, da es nur $W(f)$ Iterationen geben kann
  - Beispiel für $\Omega(W(f))$ Iterationen:

Laufzeit

- Ein Netzwerk, in dem bei schlechter Wahl von augmentierenden Pfaden 2M Iterationen stattfinden:



Laufzeit

- Dies kann verhindert werden, indem augmentierende Pfade mit Breitensuche gewählt werden
- **Behauptung:**
  - Wenn in jeder Iteration in N_f augmentierende Pfade mit Breitensuche gewählt werden, ist die Laufzeit $O(nm^2)$
  - D.h. es werden (der Kantenanzahl nach) kürzeste augmentierende Wege gewählt
- Beweis: Später
- Man spricht vom Edmonds-Karp Algorithmus

Korrektheit

- Wir zeigen das max-flow min-cut Theorem
- Aus diesem folgt, dass ein Fluss maximal ist gdw es keinen augmentierenden Pfad mehr gibt.
- Somit ist die Ausgabe ein maximaler Fluss

Min-Cuts

- Im s-t Min Cut Problem ist ein Flussnetzwerk die Eingabe
- Gesucht wird ein s-t Cut, d.h. eine Partition des Knotenmenge V in Mengen L,R mit $s \in L$ und $t \in R$
- Der Fluss über den Schnitt ist f(L,R)
- Die Kapazität des Schnittes ist C(L,R)
- Gesucht ist ein s-t Schnitt L,R mit minimaler Kapazität

Das Max-Flow Min-Cut Theorem

- **Theorem**
  - Sei $N=(G,C,s,t)$ ein Flussnetzwerk
  - Sei f ein Fluss mit Wert $W(f)$
  - Sei L,R ein minimaler s,t Schnitt mit Kapazität $C(L,R)$
  - Folgendes ist äquivalent:
    - f ist maximal
    - N_f enthält keinen augmentierenden Pfad
    - $W(f)=C(L,R)$